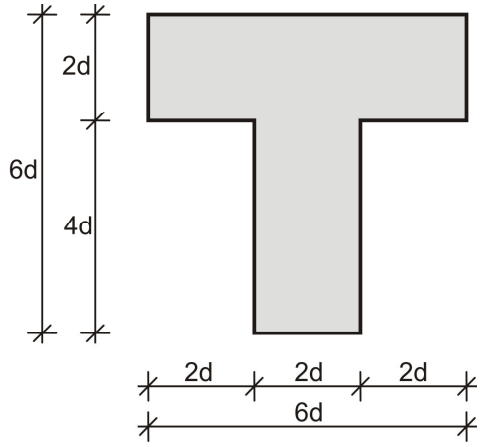
За дадените напречни пресеци да се определат:

- централните моменти на инерција (аксијални и центрифугален),
- главните оски и главните моменти на инерција,
- елипсата на инерција.

ЗАДАЧА 1:

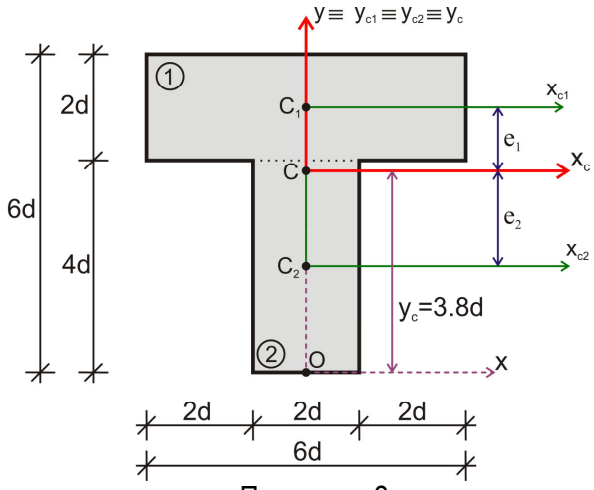


РЕШЕНИЕ:

1. Определување на тежиште

За да се определат координатите на тежиштето C(x_c, y_c) се поставува глобален координатен систем xoy во однос на кој се изразуваат координатите на елементарните површини 1 и 2. Координатите тежиштето на сложената рамнинска фигура се определуваат со примена на Вариљоновата теорема.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



<u>Површина 1 - правоаголник</u>:

$x_{c1} = 0$

$y_{c1} = 4d + \frac{2d}{2} = 5d$

$A_1 = 2d \cdot 6d = 12d^2$

<u>Површина 2 - правоаголник:</u>

$x_{c2} = 0$

$y_{c2} = \frac{4d}{2} = 2d$

$A_1 = 2d \cdot 4d = 8d^2$

$x_c = 0$ -тежиштето лежи на оската на симетрија

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{12d^2 \cdot 5d + 8d^2 \cdot 2d}{12d^2 + 8d^2} = \frac{76d^3}{20d^2} = 3.8d$$

2. Централни моменти на инерција

2.1 Аксијални моменти на инерција

Аксијалните моменти на инерција на сложената рамнинска фигура се определуваат како збир од аксијалните моменти на инерција, на двата елементарните пресеци, во однос на тежишните оски на сложената рамнинска фигура.

$$Jx_c = Jx_1 + Jx_2; \qquad Jy_c = Jy_1 + Jy_2$$

Акцијалните моменти на инерција на секој од елементарните пресеци околу тежишните оски на сложената фигура, според Штајнеровата теорема, претставуваат збир од сопствениот момент на инерција на разгледуваниот пресек околу неговите тежишни оски и положбениот момент на инерција, пресметан како производ од површината на разгледуваниот пресек и квадратот од растојанието од неговите тежишни оски до тежишните оските на сложената рамнинска фигура.

$$Jx_1 = Jx_{10} + A_1 \cdot e_1^2$$

$$Jx_{10} = \frac{6d \cdot (2d)^3}{12} = 4d^4$$

$$e_1 = y_{c1} - y_c = 5d - 3.8d = 1.2d$$

$$Jx_1 = 4d^4 + 12d^2 \cdot (1.2d)^2 = 21.28d^4$$

$$Jx_2 = Jx_{20} + A_2 \cdot e_2^2$$

$$Jx_{20} = \frac{2d \cdot (4d)^3}{12} = 10.667d^4$$

$$e_2 = y_{c2} - y_c = 2d - 3.8d = -1.8d$$

$$Jx_1 = 10.667d^4 + 8d^2 \cdot (-1.8d)^2 = 36.587d^4$$

$$Jx_c = Jx_1 + Jx_2 = 21.28d^4 + 36.587d^4 = 57.867d^4$$

$$Jy_1 = Jy_{10} + A_1 \cdot f_1^2$$

$$Jy_{10} = \frac{2d \cdot (6d)^3}{12} = 36d^4$$

$$f_1 = x_{c1} - x_c = 0$$

$$Jy_1 = 36d^4 + 12d^2 \cdot 0 = 36d^4$$

$$Jy_2 = Jy_{20} + A_2 \cdot f_2^2$$

$$Jy_{20} = \frac{4d \cdot (2d)^3}{12} = 2.667d^4$$

$$f_2 = x_{c2} - x_c = 0$$

$$Jy_1 = 2.667d^4 + 8d^2 \cdot 0 = 2.667d^4$$

$$Jy_c = Jy_1 + Jy_2 = 36d^4 + 2.667d^4 = 38.667d^4$$

2.2 Центрифугален момент на инерција

Центрифугалниот момент на инерција за сложената рамнинска фигура, кај која што барем една од двете тежишни оски претставува оска на симетрија е еднаков на нула.

$$Jx_c y_c = 0$$

3. Главни оски на инерција

За рамнински фигури, кај кои центрифугалниот момент на инерција е еднаков на нула, главните оски се поклопуваат со тежишните оски. Притоа оската ξ (1) се поклопува со тежишната оска околу која моментот на инерција е поголем, а оската η (2) се поклопува со тежишната оска околу која моментот на инерција е помал.

За $Jx_c y_c = 0$, и $Jx_c > Jy_c \Rightarrow \begin{matrix} \xi(1) \equiv x_c \\ \eta(2) \equiv y_c \end{matrix}$

Во случај за $Jx_c < Jy_c \Rightarrow \begin{matrix} \xi(1) \equiv y_c \\ \eta(2) \equiv x_c \end{matrix}$

4. Главни моменти на инерција

Бидејќи главните оски на инерција се поклопуваат со тежишните оски на пресекот, следува дека главните моменти на инерција ќе бидат еднакви со аксијалните централни моменти на инерција.

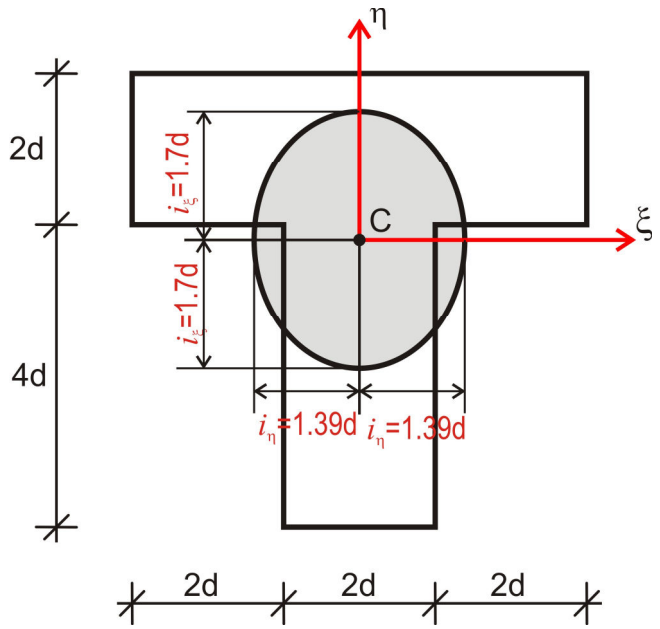
За $Jx_c > Jy_c \Rightarrow \begin{matrix} J_\xi = J_1 = Jx_c = 57.867d^4 \\ J_\eta = J_2 = Jy_c = 38.667d^4 \end{matrix}$

**Аксијалните и главните моменти на инерција се секогаш позитивни. Притоа, моментот на инерција околу оската* ξ (1) е секогаш поголем од моментот на инарција околу оската η (2), $J_\xi > J_\eta$

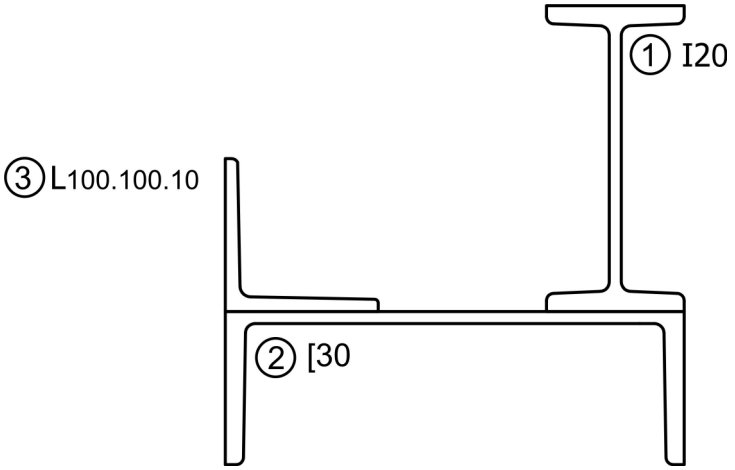
5. Елипса на инерција

$$i_\xi = i_1 = \sqrt{\frac{J_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{57.867d^4}{20d^2}} = 1.7d; \qquad i_\eta = i_2 = \sqrt{\frac{J_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{38.667d^4}{20d^2}} = 1.39d$$

Елипсата на инерција се црта во однос на координатниот систем $\xi C \eta$, при што радиусот на инерција i_ξ претставува полуоска на елипсата во правец на оската η, односно радиусот на инерција i_η претставува полуоска на елипсата во правец на оската ξ.

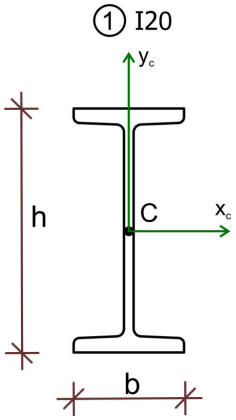


ЗАДАЧА 2:



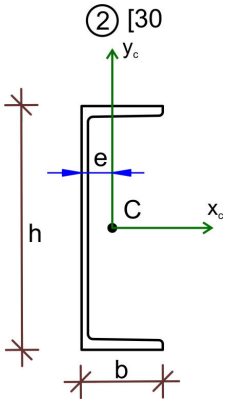
РЕШЕНИЕ:

Геометриските карактеристики за профилите 1, 2 и 3 се земаат како готови, т.е. се отчитуваат од таблица со профили.



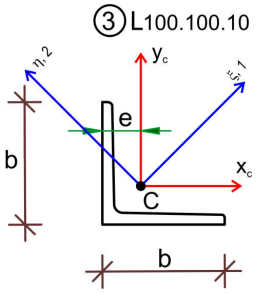
За I 20:

h=200 mm
b=90mm
A=33.5 cm^2
Jx=2140 cm^4
Jy=117 cm^4



За [30:

h=300 mm
b=100mm
A=58.8 cm^2
Jx=8030 cm^4
Jy=495 cm^4
e=27mm



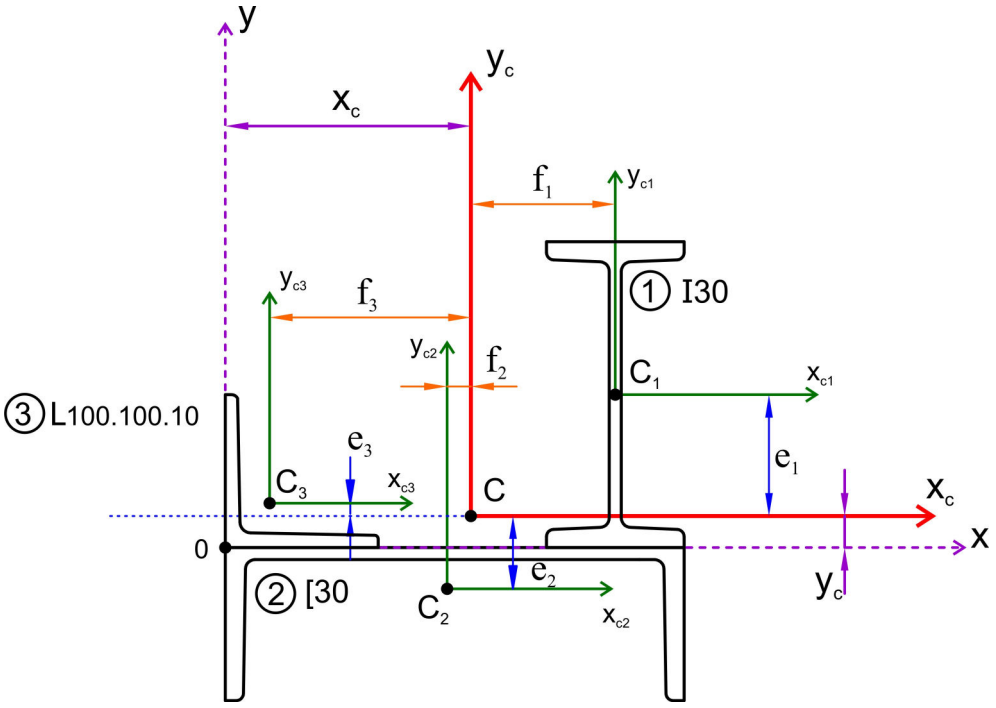
За L 100.100.10:

b=100mm
A=19.2cm^2
Jx= Jy =177cm^4
J_ξ=280cm^4
e=2.82cm

1. Определување на тежиште

За да се определат координатите на тежиштето C(x_c, y_c) се поставува глобален координатен систем хоу во однос на кој се изразуваат координатите на елементарните пресеци 1, 2 и 3. Координатите тежиштето на сложената рамнинска фигура се определуваат со примена на Вариљоновата теорема.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



Профил 1:	Профил 2:	Профил 2:
$x_{c1} = 30 - \frac{9}{2} = 25.5cm$	$x_{c2} = \frac{30}{2} = 15cm$	$x_{c3} = 2.82cm$
$y_{c1} = \frac{20}{2} = 10cm$	$y_{c2} = -2.7cm$	$y_{c3} = 2.82cm$
$A_1 = 33.5cm^2$	$A_2 = 58.8cm^2$	$A_3 = 19.2cm^2$

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2} + A_3 \cdot x_{c3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{33.5 \cdot 25.5 + 58.8 \cdot 15 + 19.2 \cdot 2.82}{33.5 + 58.8 + 19.2} = \frac{1790.394}{111.5} = 16.057cm$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{33.5 \cdot 10 + 58.8 \cdot (-2.7) + 19.2 \cdot 2.82}{33.5 + 58.8 + 19.2} = \frac{230.384}{111.5} = 2.066cm$$

2. Аксијални моменти на инерција

Аксијалните моменти на инерција на сложената рамнинска фигура се определуваат како збир од аксијалните моменти на инерција, на трите елементарните пресеци, во однос на тежишните оски на сложената рамнинска фигура.

$$Jx_c = Jx_1 + Jx_2 + Jx_3; \; Jy_c = Jy_1 + Jy_2 + Jy_3$$

Акцијалните моменти на инерција на секој од елементарните пресеци околу тежишните оски на сложената фигура, според Штајнеровата теорема, претставуваат збир од сопствениот момент на инерција на разгледуваниот пресек околу неговите тежишни оски и положбениот момент на инерција, пресметан како производ од површината на разгледуваниот пресек и квадратот од растојанието од неговите тежишни оски до тежишните оските на сложената рамнинска фигура.

$$Jx_1 = Jx_{10} + A_1 \cdot e_1^2$$
$$Jx_{10} = Jx(\text{I}20) = 2140cm^4$$
$$e_1 = y_{c1} - y_c = 10 - 2.066 = 7.934cm$$
$$Jx_1 = 2140 + 33.5 \cdot 7.934^2 = 4248.65cm^4$$

$$Jx_2 = Jx_{20} + A_2 \cdot e_2^2$$
$$Jx_{20} = Jy_{[30} = 495cm^4$$
$$e_2 = y_{c2} - y_c = -2.7 - 2.066 = -4.766cm$$
$$Jx_1 = 495 + 58.8 \cdot (-4.766)^2 = 1830.76cm^4$$

$$Jx_3 = Jx_{30} + A_3 \cdot e_3^2$$
$$Jx_{30} = Jx_{\text{L100.100.10}} = 177cm^4$$
$$e_3 = y_{c3} - y_c = 2.82 - 2.066 = 0.754cm$$
$$Jx_1 = 177 + 19.2 \cdot 0.754^2 = 187.91cm^4$$

$$Jx_c = Jx_1 + Jx_2 + Jx_3 = 4248.65 + 1830.76 + 187.91 = 6267.32cm^4$$

$$Jy_1 = Jy_{10} + A_1 \cdot f_1^2$$
$$Jy_{10} = Jy(\text{I}20) = 117cm^4$$
$$f_1 = x_{c1} - x_c = 25.5 - 16.057 = 9.443cm$$
$$Jx_1 = 117 + 33.5 \cdot 9.443^2 = 3103.98cm^4$$

$$Jy_2 = Jy_{20} + A_2 \cdot f_2^2$$
$$Jy_{20} = Jx_{[30} = 8030cm^4$$
$$f_2 = x_{c2} - x_c = 15 - 16.057 = -1.057cm$$
$$Jx_1 = 8030 + 58.8 \cdot (-1.057)^2 = 8095.74cm^4$$

$$Jy_3 = Jy_{30} + A_3 \cdot f_3^2$$
$$Jy_{30} = Jy_{\text{L100.100.10}} = 177cm^4$$
$$f_3 = x_{c3} - f_c = 2.82 - 16.057 = -13.237cm$$
$$Jy_3 = 177 + 19.2 \cdot (-13.237)^2 = 3541.36cm^4$$

$$Jy_c = Jy_1 + Jy_2 + Jy_3 = 3103.98 + 8095.74 + 3541.36 = 14741.08cm^4$$

Констатација: $Jx_c < Jy_c \Rightarrow$ главната оска ξ се добива со ротација на оската y_C за агол φ, односно главната оска η се добива со ротација на оската x_C за агол φ.

3. Центрифугален момент на инерција

Центрифугалниот момент на инерција за сложената рамнинска фигура се определува аналогно како и аксијалните моменти на инерција.

$$Jx_c y_c = Jxy_1 + Jxy_2 + Jxy_3$$

$Jxy_1 = Jxy_{10} + A_1 \cdot e_1 \cdot f_1$

$Jxy_{10} = 0$ *(*центрифугалниот момент на инерција околу тежишните оски е еднаков на нула, ако барем една од тежишните оски на разгледуваниот пресек претставува оска на симетрија)*

$e_1 = 7.934cm$; $f_1 = 9.443cm$

$Jxy_1 = 0 + 33.5 \cdot 7.934 \cdot 9.443 = 2509.68cm^4$

$Jxy_2 = Jxy_{20} + A_2 \cdot e_2 \cdot f_2$

$Jxy_{20} = 0$ (пресекот е симетричен)

$e_2 = -4.766cm$; $f_2 = -1.057cm$

$Jxy_1 = 0 + 58.8 \cdot (-4.766) \cdot (-1.057) = 296.33cm^4$

$Jxy_3 = Jxy_{30} + A_3 \cdot e_3 \cdot f_3$

$Jxy_{30} = ?$ *(*сопствениот центрифугален момент на инерција за аголникот може да се изрази од равенката за определување на главни моменти на инерција)*

$$J_{\xi,\eta} = J_{1,2} = \frac{Jx_C + Jy_C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Jx_C - Jy_C)^2 + 4Jx_C y_C{}^2}$$

Бидејки аголникот има исти аксијални моменти на инерција во однос на двете тежишни оски $Jx_C = Jy_C$, следува дека:

$$J_{\xi,\eta} = J_{1,2} = \frac{Jx_C + Jx_C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Jx_C - Jx_C)^2 + 4Jx_C y_C{}^2} = \frac{2Jx_C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4Jx_C y_C{}^2}$$

$J_\xi = J_1 = Jx_C + Jx_C y_C$, односно:

$Jx_C y_C = \pm\left|J_\xi - Jx_C\right|$

***Знакот на сопствениот центрифугалниот момент на инерција се усвојува во зависност од ориентацијата на аголникот во сложениот пресек.*

$Jx_C y_{C\text{L100.100.10}} = -|280 - 177| = -103cm^4$

$Jxy_{30} = Jx_C y_{C\text{L100.100.10}} = -|280 - 177| = -103cm^4$

$e_3 = 0.754cm$

$f_3 = -13.237cm$

$Jxy_3 = -103 + 19.2 \cdot (0.754) \cdot (-13.237) = -294.58cm^4$

$Jx_c y_c = Jxy_1 + Jxy_2 + Jxy_3 = 2059.68 + 296.33 - 294.58 = 2511.43cm^4$

4. Главни оски на инерција

$$\tan(2\varphi) = -\frac{2 \cdot Jx_C y_C}{Jx_C - Jy_C} = -\frac{2 \cdot 2511.43}{6267.32 - 14741.08} = 0.593$$

$2\varphi = \arctan(0.593) = 30.66°$, $\qquad \varphi = 30.66°/2 = 15.33°$

5. Главни моменти на инерција

$$J_{\xi,\eta} = J_{1,2} = \frac{Jx_C + Jy_C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Jx_C - Jy_C)^2 + 4Jx_C y_C{}^2}$$

$$J_{\xi,\eta} = J_{1,2} = \frac{6267.32 + 14741.08}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(6267.32 - 14741.08)^2 + 4 \cdot 2511.43^2} =$$

$$= 10504.2 \pm 4925.3$$

$$J_\xi = J_1 = 10504.2 + 4925.3 = 15429.5cm^4$$

$$J_\eta = J_2 = 10504.2 - 4925.3 = 5578.9cm^4$$

Контрола: $Jx_C + Jy_C = J_\xi + J\eta$

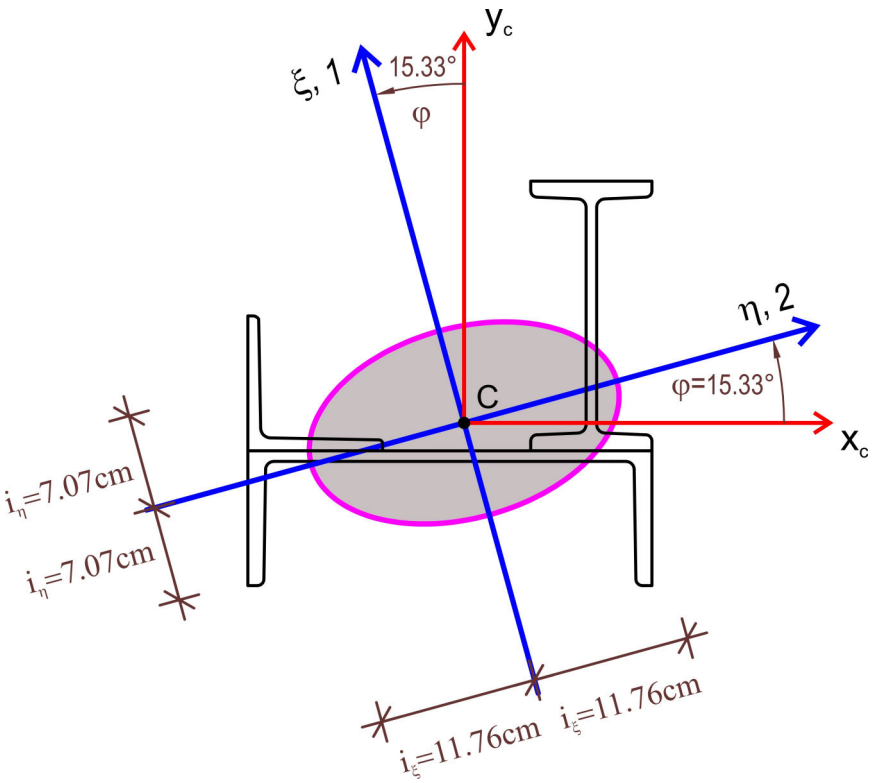
$$Jx_C + Jy_C = J_\xi + J\eta$$

$$6267.32 + 14741.08 = 15429.5 + 5578.9$$

$$21008.4 = 21008.4 \checkmark$$

6. Елипса на инерција

$$i_\xi = i_1 = \sqrt{\frac{J_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{15429.5}{111.5}} = 11.76cm$$

$$i_\eta = i_2 = \sqrt{\frac{J_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{5578.9}{111.5}} = 7.07cm$$

Елипсата на инерција се црта во однос на координатниот систем $\xi C\eta$, при што радиусот на инерција i_ξ претставува полуоска на елипсата во правец на оската η, односно радиусот на инерција i_η претставува полуоска на елипсата во правец на оската ξ.