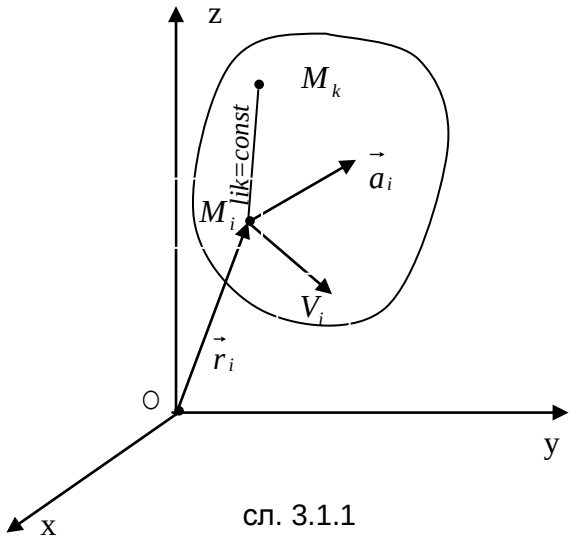
1. Дефинирај го поимот „круто тело”.

Во кинематиката, поимот **круто тело може да се дефинира како ограничен дел од просторот исполнет со континуално распределени геометриски точки чие меѓусебно растојание секогаш останува непроменето (*l_{ik}=const.*)** (Сл. 3.1.1).

2. Како се дефинира положба на круто тело во простор

За определување на положбата на круто тело која се менува со текот на времето се избира референтен координатен систем Oxyz.



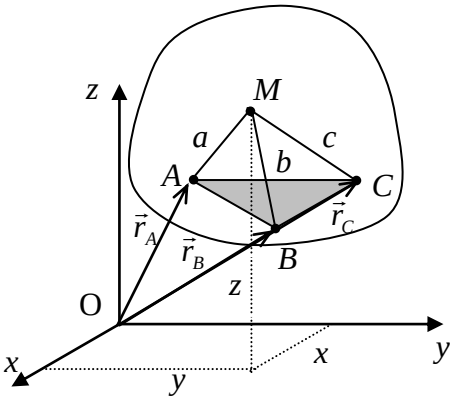
сл. 3.1.1

Движењето на крутото тело е наполно определено, ако за секоја негова точка во секој момент е определена соодветната положба, брзината и забрзувањето, односно:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t); \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i(t); \quad \vec{a}_i = \vec{a}_i(t)$$

Во најопшт случај, точките од крутото тело опишуваат различни траектории и имаат различни брзини и забрзувања.

Нека е дадено **круто тело кое се движи во просторот произволно и може да се поместува и завртува**. **Ваквото тело е наречено слободно круто тело, а движењето слободно движење на круто тело.**



сл. 3.1.2

Положбата на слободно круто тело во простор е наполно определена ако се дадени координатите на три негови точки, на пример A, B и C кои не лежат на една права, и го сочинуваат триаголникот ABC.

Со координатите на точките A (x_A;y_A;z_A), B (x_B; y_B; z_B), C (x_C; y_C; z_C) можат да се определат координатите на било која произволна негова точка M(x,y,z) (Сл. 3.1.2). Геометриските зависности помеѓу координатите на точката M и трите дадени точки A, B, C, користејќи го условот за непроменето заемно растојание, се добиваат следните равенки:

$$\begin{aligned}
&(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=a^2=const\\
&(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2=b^2=const\\
&(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=c^2=const
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Од овие равенки се определуваат координатите на произволната точка M од телото. Може да се заклучи, дека со три неколинеарни точки од телото (A, B, C) се

определува положбата на секоја негова точка. Но, и двете координати на трите точки A, B, C се потчинети на следните зависности:

$$\begin{aligned}(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= \overline{AB^2} = const \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= \overline{BC^2} = const \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 &= \overline{CA^2} = const\end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

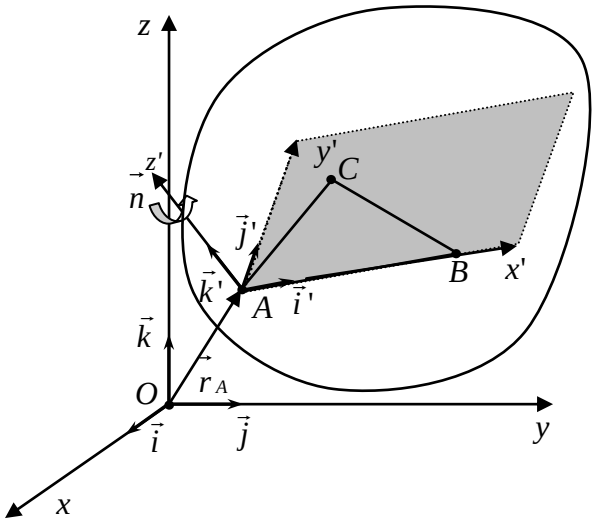
Бројот на равенките (3.1.2) изнесува три, што значи дека три од деветте координати на точките A, B, C се зависни од останатите шест**. Очигледно е, дека шест координати на точките A, B, C се независни и доволни за определување на положбата на круто тело во простор. Независните координати се наречени и параметри на движењето, или генерализирани координати.**

Бројот на независните координати, односно бројот на параметрите го определува и степенот на слобода на круто тело во простор.

Следува, дека круто тело кое се движи слободно во просторот има шест степени на слобода. Степенот на слобода се совпаѓа со бројот на независните координати со кои еднозначно е определена положбата на крутото тело во просторот.

3. Дефинирај го поимот за подвижен триедар

За полесно решавање на проблемот на слободното движење на круто тело во простор, усвоен е еден метод наречен **метод на подвижен триедар**, односно подвижен координатен систем Ax'y'z'.



сл. 3.1.3

Нека е дадено круто тело кое се движи слободно во просторот. Положбата на крутото тело се определува во однос на референтен неподвижен координатен систем Oxyz. Освен неподвижен координатен систем Oxyz, се воведува и подвижен координатен систем Ax'y'z', кој е врзан за телото. Оформувањето на овој координатен систем произлегува од трите неколинеарни точки A, B, C кои ја определуваат положбата на круто тело во простор.

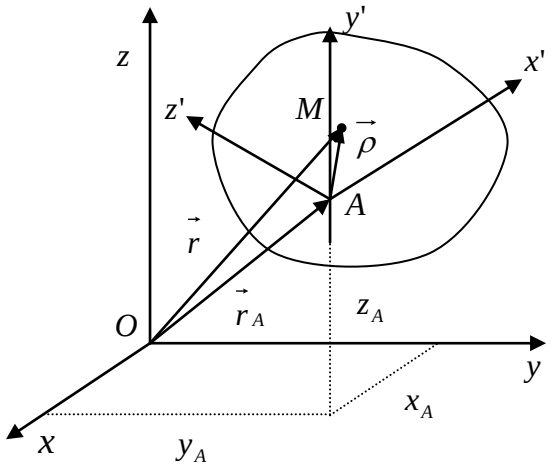
Точките A, B, C сочинуваат рамнина чија нормала може да се ориентира на онаа страна во просторот од која се гледа ротација на фигурата ABC во насока спротивна на насоката на часовата стрелка.

Со точката A и со ориентираната нормала $\vec{n}$ се определува рамнината ABC, односно координатната рамнина Ax'y'. (Сл.3.1.3).

4 КОНЕЧНИ РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ НА ТОЧКА ОД КРУТО ТЕЛО

За да се определи **положбата на произволна точка** M **од телото, односно да се определат нејзините конечни равенки на движење, се користат конечните равенки на движење на круто тело во простор**.

За радиус вектор на точката M во однос на неподвижниот координатен систем $Oxyz$ се усвојува векторот $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, а за радиус вектор на точката M во однос на подвижниот триедар $A\,x'\,y'\,z'$ се усвојува векторот $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$ (Сл. 3.3.1).



сл. 3.3.1

Векторот $\vec{\rho}$ останува непроменет по интензитет, правец и насока во однос на телото, односно во однос на координатниот систем $A\,x'\,y'\,z'$, што значи дека и неговите координати $x'\,y'\,z'$ се постојани за време на движењето. **Конечните равенки на движење на точката** M **во однос на постојаниот координатен систем** $OXYZ$**, се трите координати** $x,\ y,\ z$, **кои се определуваат од векторската реакција:**

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (3.3.2)$$

каде се:

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

$$\vec{\rho} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \qquad (3.3.3)$$

Со замена на (3.3.3) во (3.3.2) се добива:

$$\vec{r} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \qquad (3.3.4)$$

Ако $\vec{i}',\ \vec{j}',\ \vec{k}'$ се изразат преку косинусите на правци на оските $x'\,y'\,z'$ во однос на оските *x, y, z* , равенката (3.3.4) се добива во следната форма:

$$\begin{aligned}\vec{r} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + x'(\cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j} + \cos\gamma_1\vec{k}) + \\ y'(\cos\alpha_2\vec{i} + \cos\beta_2\vec{j} + \cos\gamma_2\vec{k}) + z'(\cos\alpha_3\vec{i} + \cos\beta_3\vec{j} + \cos\gamma_3\vec{k})\end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

Со равенката (3.3.5) се добива **конечната равенка на движење на точката** M **од телото во векторски облик.**

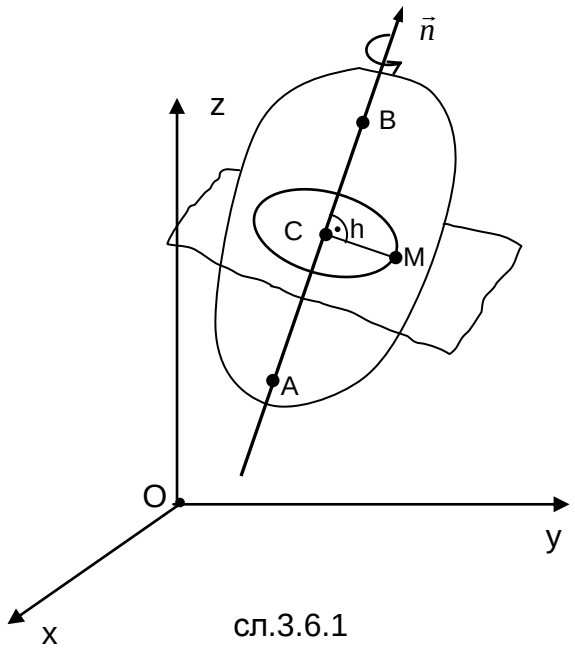
Координатите на векторот $\vec{r}$, се аналитички равенки кои произлегуваат од релацијата (3.3.5), како коефициенти пред $\vec{i},\ \vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} x &= x_A + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= y_A + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= z_A + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad (3.3.6)$$

Равенствата (3.3.6) се конечни равенки на движење на точката M од телото. Координатите на точката $A(x_A, y_A, z_A)$ и косинусите на ортовите $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ се променливи и зависни од времето, а x' y' z' се постојани големини. Следува дека и координатите x, y, z, се исто така променливи и зависни од времето.

5. Дефинирај го ротационото движење на круто тело околу неподвижна оска

Ако две точки, на пример А и В, од крутото тело за време на движењето остануваат неподвижни, тогаш телото се завртува, односно ротира околу оска $\vec{n}$, која минува низ точките А и В. (Сл.3.6.1)

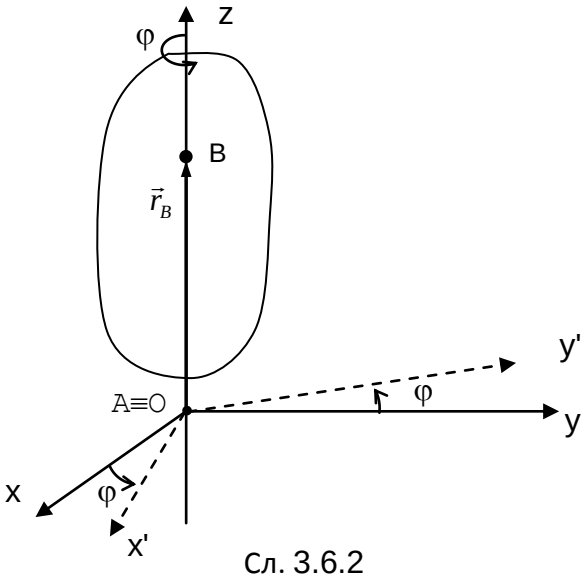


сл.3.6.1

Оската е неподвижна и сите точки од телото кои лежат на истата остануваат неподвижни. Ваквата оска околу која ротира крутото тело е наречена оска на ротација или ротациона оска.

Останатите точки од телото се завртуваат околу ротационата оска и опишуваат кружници кои лежат во рамнини нормални на истата. Центрите на кружниците лежат на ротационата оска, а радиусите се еднакви со растојанието од точката до оската, $\overline{MC} = h$ (Сл.3.6.1).

Нека за оска на ротација се избере координатната оска *Oz*, а точката А од крутото тело се совпадне со кородинатниот почеток *O*. Точката В, чија положба е определена со радиус векторот $\vec{r}_B = const$ останува на ротационата оска *Oz* (Сл.3.6.2).



Сл. 3.6.2

Ако вектрот на положбата е константен, тогаш неговиот прв и втор извод по времето се еднакви на нула, односно $\vec{v}_B = 0$, $\vec{a}_B = 0$.

Следува дека брзината и забрзувањето за секоја точка од ротационата оска да се еднакви на нула. Со тоа се докажа неподвижноста на точките кои лежат на ротационата оска *Oz*.

Ротацијата на крутото тело околу неподвижната оска *Az* која е и оска на ротација се определува со една агловакоордината, параметарот φ; т.е.:

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (3.6.1)$$

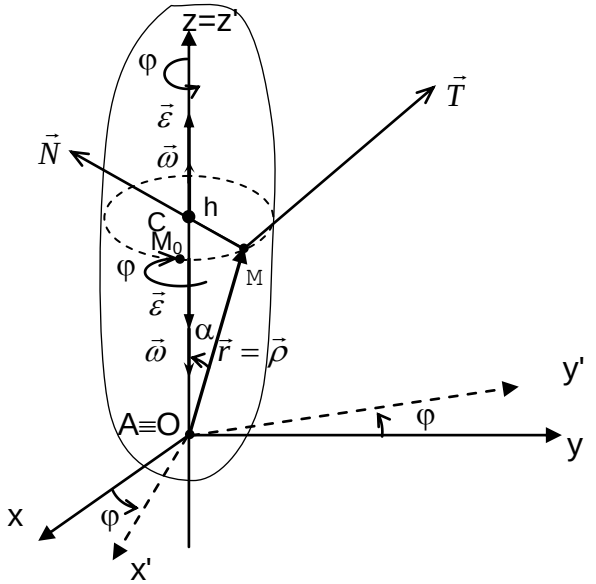
Равенката (3.6.1) е конечна равенка со која е дефиниран законот на ротација на круто тело околу неподвижната оска *Oz*, односно *Az.*

Круто тело кое ротира околу неподвижната оска *Az* има еден степен на слобода.

6. Дефинирај поим за аглова брзина и аглово забрзување

За основни кинематички карактеристики на круто тело кое ротира околу неподвижна оска се усвоени: аголот φ, агловата брзина ω и агловото забрзување ε.

Бидејки е законот на ротација на круто тело околу неподвижна оска *Az=Oz* определен со агловата координата, **аголот на ротација**, определен со $\varphi=\varphi(t)$ се воведуват соодветните негови кинематички карактеристики, **аглова брзина ω** и **аглово забрзување ε.**



сл.3.6.4

Векторот на агловата брзина се определува од изразот:

$$\vec{\omega}=\omega\cdot\vec{k}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}\,, \qquad \text{каде}$$

$$\vec{k}=\vec{k}'=const. \qquad (3.6.8)$$

Од равенката (3.6.8), векторот на агловата брзина има константен правец кој се совпаѓа со оската на ротацијата *Az*. Нејзината алгебарска вредност се добива од првиот извод по времето на аголот $\varphi(t)$, односно:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Насоката на $\vec{\omega}$ зависи од насоката на ротацијата, ако гледаме од врвот на позитивната ориентација на оската *Az*, е позитивна ако е ротацијата спротивна на ротацијата на часовата стрелка.

Ако е $\omega=\dot{\varphi}>0$, насоката на агловата брзина се совпаднува со насоката на оската *Az*, и обратно ако е $\omega=\dot{\varphi}<0$ векторот $\vec{\omega}$ е спротивно насочен.

Вектор на аглово забрзување $\vec{\varepsilon}$**,** се определува со изводот по времето на агловата брзина $\vec{\omega}$, т.е.

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\omega\cdot\vec{k}\right)=\frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{k} \qquad (3.6.9)$$

Ако е $\varepsilon=\dot{\omega}>0$ векторот на агловото забрзување е позитивно насочен $\left(\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}\right)$ и обратно, ако е $\varepsilon=\dot{\omega}<0$, векторот на агловото забрзување е обратно насочен, односно спротивно на насочување со $\vec{\omega}$ $\left(\vec{\varepsilon}\downarrow\uparrow\vec{\omega}\right)$.

Во случајот: $\varepsilon\cdot\omega>0$, агловата брзина $\vec{\omega}$ и агловото забрзување $\vec{\varepsilon}$ се еднакво насочени во позитивна $\left(\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}\right)$, или негативна насока на ротација $\left(\vec{\varepsilon}\downarrow\downarrow\vec{\omega}\right)$, ротацијата на крутото тело е забрзана.

Ако е $\varepsilon\cdot\omega<0$ агловата брзина $\vec{\omega}$ и агловото забрзување $\vec{\varepsilon}$ се спротивно насочени $\left(\vec{\varepsilon}\uparrow\downarrow\vec{\omega}\right)$ и $\left(\vec{\varepsilon}\downarrow\uparrow\vec{\omega}\right)$, ротацијата е забавена.

7. Дефинирај рамномерна и рамномерно променлива ротација

Како **карактеристични ротации** можат да се одвојат **рамномерната и рамномерно променливата ротација.**

При **рамномерната ротација** на круто тело околу неподвижна оска *Оз*, агловото забрзуввање $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$, агловата брзина $\omega = \pm\omega_0 = const.$, а аголот на ротација $\varphi = \varphi_0 \pm \omega \cdot t$. Нека е почетниот агол $\varphi_0 = 0$ од равенката $\varphi = \omega \cdot t$ може да се определи агловата брзина $\vec{\omega}$, т.е.:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Аголот на ротација може да се изрази во функција од бројот на ротациите *n*, односно $\varphi = 2\pi \cdot n$.

Ако телото се заврти *n* пати за време од една минута, се добива следната аглова брзина:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

Бројот на зартувања во една минута *"n"* е карактеристика при рамномерна ротација која се применува во техничката пракса.

Во случај кога круто тело ротира **рамномерно променливо** околу неподвижната оска *Oz* агловото забрзување е $\varepsilon = \pm\varepsilon_0 = const.$, агловата брзина се менува рамномерно променливо, т.е. $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon_0 \cdot t$, а законот на ротацијата е $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon_0 \cdot t^2}{2}$. Знакот *"+"* определува аглово забрзување $\varepsilon_0 > 0$, а знакот *"-"* $\varepsilon_0 < 0$. Во случај кога $\varepsilon_0 > 0$ крутото тело ротира рамномерно забрзано и спротивно, кога е $\varepsilon_0 < 0$ ротацијата е рамномерно забавена и со текот на времето агловата брзина се намалува, односно ротацијата престанува.

Во најопшт случај агловото забрзување може да биде променливо, да се менува во функција од времето т, положбата φ, и агловата брзина ω, односно: $\varepsilon = \varepsilon(t, \varphi, \omega)$.

8. Дефинирај ја врската помеѓу линиските и агловите карактеристики при ротација на круто тело околу оска

Брзина и забрзување на точка *M* при ротација на круто тело околу неподвижна оска се определуваат на следен начин:

Брзината на точката *M*, може да се определи од Ојлеровата формула:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] \qquad (17.9)$$

Од формулата (17.9) може да се констатира дека брзината на точката *M* од телото има правец, нормален на рамнината која минува низ точката *M* и ротационата оска *Az*, односно правец на тангентата на кружница и насока еднаква на насоката на ротацијата на телото (сл. 17.4). Интензитетот на брзина се определува од интензитетот на формулата ,т.е.:

$$V = \omega \cdot \rho \cdot \sin\angle(\vec{\omega}, \vec{\rho}) = \omega \cdot \rho \cdot \sin\alpha = \omega \cdot h \qquad (17.10)$$

Интензитетот на брзината на точката *M* е еднаква на производот од агловата брзина на телото и радиусот на кружницата што ја опишува истата точка.

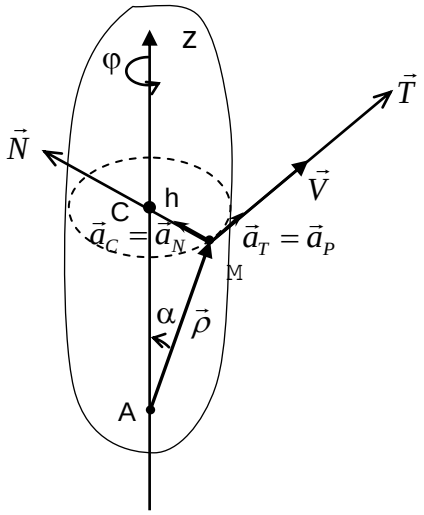
Забрзувањето при ротација на круто тело околу неподвижна оска *Az* се добива со диференцирање на брзината по времето, т.е:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}([\vec{\omega}, \vec{\rho}]) = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{\rho}]] \qquad (17.13)$$

Компонентата $[\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}]$ од (17.13) го определува ротационото забрзување $\vec{a}_p$, односно:

$$\vec{a}_P = [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] \qquad (17.14)$$

Ротационото забрзување $\vec{a}_p$ е нормално на рамнината во која лежат векторите $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\rho}$, односно рамнина која минува низ ротационата оска *Az* и точката *M*. Според тоа, правецот на ротационото забрзување се совпаѓа со правецот на тангентата на кружницата на точката, што значи дека ротационото забрзување е истовремено и тангенцијалната компонента на забрзувањето при кружно движење, односно:



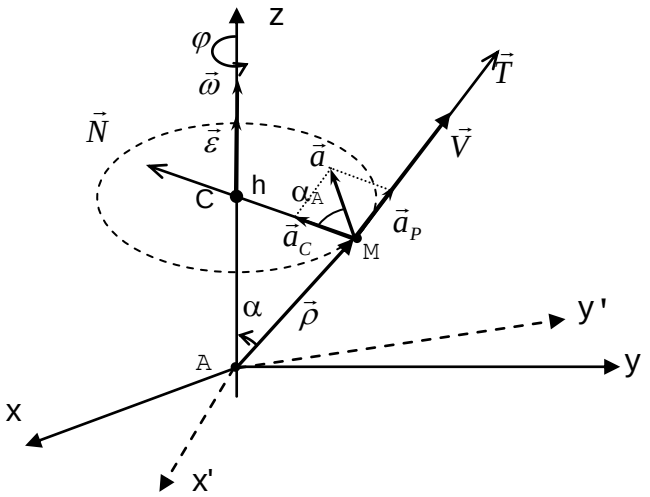
$$\vec{a}_p = \vec{a}_T \qquad (17.15)$$

Интензитоетот на $\vec{a}_p$ се добива од интензитетот на (17.14), односно:

$$a_P = \varepsilon \cdot \rho \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot h = a_T \qquad (17.16)$$

Втората компонента на забрзувањето, односно $[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{\rho}]]$ може да се напише во поедноставна форма. Интензитетот на $\vec{a}_C$ се добива со интензитетот на векторот $\omega^2\overrightarrow{MC}$, односно:

$$a_C = \omega^2\overrightarrow{MC} = \omega^2 h \qquad (17.19)$$



Следува дека тоталното забрзување *a*, при ротација на круто трело околу неподвижна оска се добива од геометрискот збир на компонентите, ротационото забрзување $\vec{a}_p$ и центрипетално $\vec{a}_C$, односно:

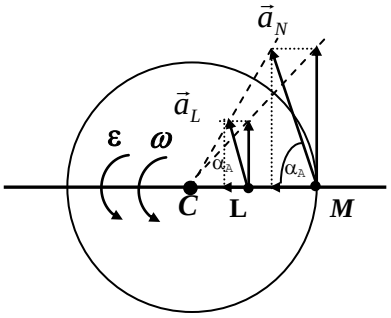
$$\vec{a} = \vec{a}_P + \vec{a}_C = [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] - \omega^2\overrightarrow{CM} \qquad (17.20)$$

Бидејќи $\vec{a}_P \perp \vec{a}_C$, тоталното забрзување $\vec{a}$ на точката има интензитет

$$a = \sqrt{a^2{}_P + a^2{}_C} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (17.21)$$

и со радиусот на точката заклопува агол α_A, определен од равенството:

$$\tan\alpha_a = \frac{a_P}{a_C} = \frac{\varepsilon \cdot h}{\omega^2 \cdot h} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (17.22)$$



Аголот α_A не зависи од положбата на точката од телото и во даден момент е ист за сите точки (сл.17.7).

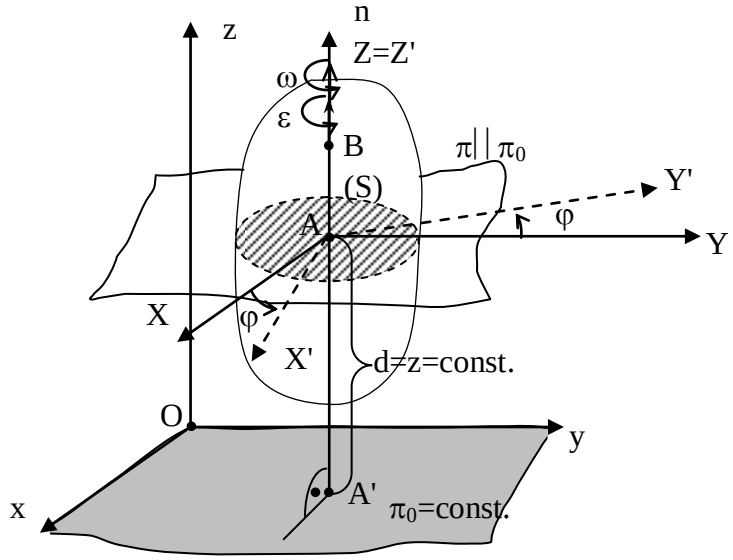
Точките на една права нормална на ротационата оска имаат линеарно распределени компонентални забрзувања $\vec{a}_P$ и $\vec{a}_C$ и линеарно распределено тотално забрзување $\vec{a}$.

Компонентите на $\vec{a}$ во однос на *Oxyz* се:

$$a_x = -\varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x$$
$$a_y = \varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y$$
$$a_z = 0$$

9. Дефинирај број на степени на слобода кај комплано движење на круто тело

Кога сите точки од крутото тело се движат во рамнини паралелни на постојана рамнина, движењето е наречено рамнинско или комплано движење на круто тело.
Нека **за постојана рамнина се усвои координатната рамнина π_0=Oxy**. Со извршен пресек низ телото кој е паралелен со постојаната рамнина Oxy, се добива фигура C. Истата се движи во сопствената рамнина, која е паралелна со постојаната рамнина (Сл.3.8.1).



сл. 3.8.1

Секоја права n која минува низ телото и која е нормална на рамнината Oxy за време на движењето останува паралелна на себе, односно се движи транслаторно во однос на референтниот кординатен систем Oxy. Растојанието на секоја точка на правата до координатната рамнина е постојана, односно
$d = \overline{AA'} = const.$ (Сл. 3.8.1)
Нека во точката A која лежи на фигурата "C" се усвои координатен почеток на координатниот систем Ax'y'z' чија координатна оска Az' се совпаѓа со правата n, односно Az'=Az. Координатните оски Ax' и Ay' се завртуваат за $\angle\varphi$ во однос на Axy. Линијата на јазлите n е оската Ax.

Шесте координати, кои се параметри на слободното движењето на круто тело во просторот, се добиваат во следна форма:

$$
\begin{aligned}
x_A &= x_A(t) & z_A &= const. \\
y_A &= y_A(t) & \psi &= \angle(x,n) = 0 \\
\varphi &= \varphi(t) & \theta &= \angle(z,z') = 0
\end{aligned}
\qquad (3.8.1)
$$

Со равенките (3.8.1) (три независни координати и три условени координати) се определува законот на комплано движење на круто тело во простор. Трите независни координати:

$$x_A=x_A(t),\ y_A=y_A(t) \text{ и } \varphi=\varphi(t) \qquad (3.8.2)$$

се **три конечни равенки со кои се дефинира законот на комплано движење на круто тело**.

Според тоа, круто тело кое се движи комплано има 3 степени на слобода. Со координатите x_A и y_A се определува транслаторното движење на оската Az=Az' , а со аголот φ ротацијата на телото околу оската Az.

10. Дефинирај ги кинематичките карактеристики кај комплано движење на круто тело

Агловата брзина е:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}$$

и е со постојат правец нормален на неподвижната рамнина, со интензитет еднаков на првиот извод по времето на аголот на завртувањето φ(т). Насоката на $\vec{\omega}$ се совпаѓа со насоката на оската Az', ако е ротацијата спротивна на часовата ротација. Во тој случај $\omega = \dot{\varphi} < 0$, и обратно при ротација во насока на часовата ротација $\omega = \dot{\varphi} < 0$ и насоката на $\vec{\omega}$ е спротивна на Az'.

Агловото забрзување $\vec{\varepsilon}$ се определува со изводот по времето на агловата брзина $\vec{\omega}$, односно:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega} \cdot \vec{k} = \ddot{\varphi} \cdot \vec{k}$$

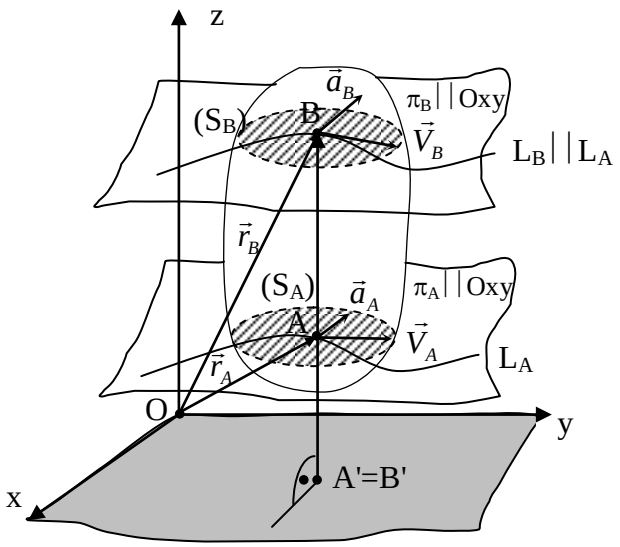
Следува дека и $\vec{\varepsilon}$ има константен правец кој е еднаков со правецот на $\vec{\omega}$, а интензитетот е еднаков на првиот извод по времето на агловата брзина или на вториот извод по времето на аголот на ротацијата φ(t).

За еднакво насочени вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ производот од алгебарските вредности е поголем од нула, т.е. $\omega\cdot\varepsilon>0$ и ротацијата е забрзана, а во случај ако $\omega\cdot\varepsilon<0$ ротацијата е забавена, односно двата вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ се спротивно насочени.

Од претходно изложеното, произлегуваат основните карактеристики на компланото движење на круто тело.

Траекториите на точките се рамни криви кои лежат во рамнини паралелни на постојаната рамнина.

Брзината и забрзувањето на сите точки од телото лежат во паралелни **рамнини на постојаната рамнина.**



сл. 3.8.2

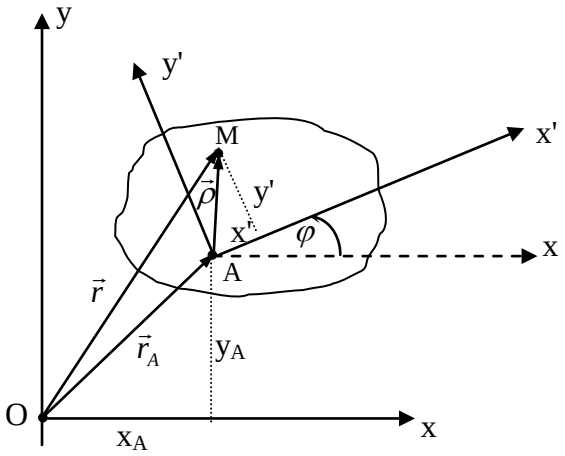
Точките од телото кои лежат на правата нормална на неподвижната рамнина (прва која се движи транслаторно во однос на Oxyz) имаат еднакви брзини и забрзувања $\left(\vec{V}_B = \vec{V}_A, \vec{a}_B = \vec{a}_A\right)$, (Сл.3.8.2) односно опишуваат паралелни траектории, т.е. $L_B||L_A$.

Може да се заклучи дека компланото движење на круто тело може да се замени со комплано движење на рамнинска фигура С (пресекот на телото и рамнината паралелна на постојаната рамнина), која се движи во сопствената рамнина.

11. Закон на движење кај комплано движење

За да се определи **законот на движењето на оваа рамнинска фигура**, за сопствена рамнина се усвојува координатната рамнина Oxy и соодветниот референтен координатен систем.

За пол на ротација се избира точката А од рамнинската фигура со која е оформен подвижниот координатен систем Axy. Положбата на фигурата во однос на координатниот систем Oxy е наполно определена со координатите x_A и y_A на полот А и аголот φ помеѓу координатните оски Ax и Ax' , односно:



сл. 3.8.3

$$x_A = x_A(t)$$
$$y_A = y_A(t) \qquad (3.8.3)$$
$$\varphi = \varphi(t)$$

Трите независни координати (3.8.3) го определуваат законот на движење на рамнина фигура и истиот се совпаѓа со законот на компланото движење на телото (3.8.2).

Рамнинската фигура која се движи во рамнина има три степени на слобода.

Положбата на произволната точка М од рамнинската фигура во однос на подвижниот координатен систем Ax'y' е определена со координатите x' и y' кои за време на движењето се постојани за разлика од x и y кои во однос на неподвижниот координатен систем Oxy се променливи.

Законот на движење на точката М во однос на Oxy се определува со векторската равенка:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (3.8.4)$$

Положбата на точката А во однос Оху се определува со векторот на положбата $\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}$ а положбата на М во однос на подвижниот координатен систем се определува со векторот $\vec{\rho} = x' \cdot \vec{i}\,' + y' \cdot \vec{j}\,'$. Со замена на релациите $\vec{i}\,' = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$ и $\vec{j}\,' = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$ во горното равенство се добиваат проекциите на векторот $\vec{\rho}$ во однос на Оху, т,е:

Дефинитивно, во **координатната форма се определува законот на движење на точката М:**

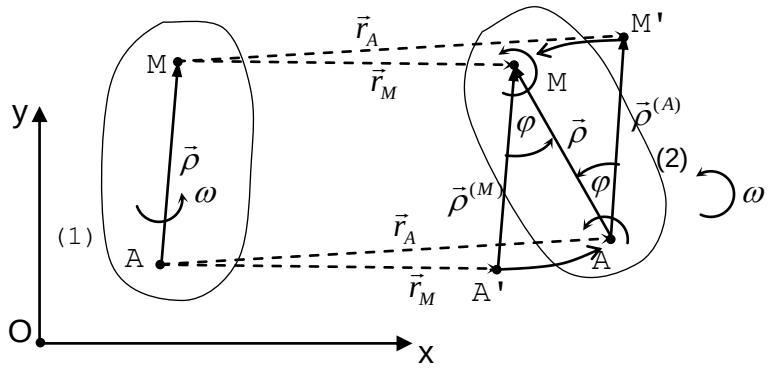
$$\begin{aligned} x &= x_A + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= y_A + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \qquad (3.8.5)$$

Од равенките (3.8.5) може да се констатира дека **законот на движењето на произволна точка М од рамнинска фигура е во зависност од законот на движењето на рамнинската фигура.**

Векторот $\vec{\rho}\,'$ во однос на координатниот систем Ах'у'z' е секогаш постојан, односно $\vec{\rho} = x' \cdot \vec{i}\,' + y' \cdot \vec{j}\,' = const.$, следува дека: $x' = const.$ $y' = const.$

12 ПОМЕСТУВАЊЕ НА РАМНИНСКА ФИГУРА

Нека една рамнинска фигура се помести во рамнината Оху од положбата (1) во положбата (2), (Сл.3.9.1). Рамнинската фигура може да се замени со крут линиски елемент составен од две избрани точки, на растојание на пример А и М. Правецот $\overline{AM}$ се ориентира со векторот $\overrightarrow{AM} = \vec{\rho}$.

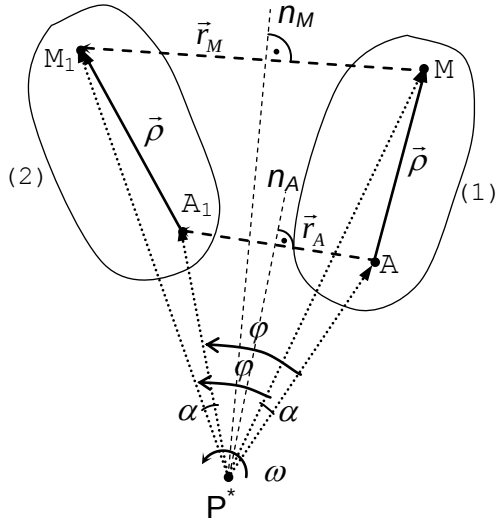


Сл.3.9.1

Од Сл.3.9.1 може да се заклучи **дека поместувањето на рамнинска фигура во неподвижната рамнина Оху може да се определи со помош на една транслација и една ротација околу избран пол при кое остануваат непроменливи големини, аголот φ и насоката на ротацијата**. За пол на ротацијата може да се избере било која точка. **Со промена на полот на ротацијата се менуваат карактеристиките на транслаторното движење, а ротацијата останува непроменета**. На пример, нека е точката М избрана на пол на ротацијата. Се менува транслаторното движење кое во овој случај е определено со векторот на поместувањето $\vec{r}_M$, а ротацијата околу полот, точката М останува непроменета, односно аголот φ и насоката на ротацијата не се менуваат. За избран пол на ротација во точката А се менува транслаторното движење, а ротацијата останува непроменета.

13. Центар на конечна ротација

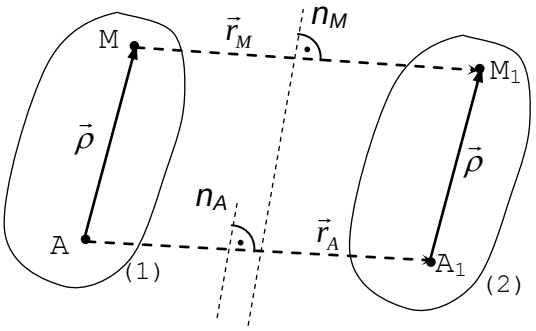
Вториот начин за поместување на една рамнинска фигура од положба (1) во положба (2) во постојана рамнина Oxy е со ротација околу определена точка. Тоа значи дека полот на ротацијата е една точка во рамнината која останува неподвижна (Сл. 3.9.2).
Нека рамнинската фигура е поместена од положбата (1) во положба (2).



Сл.3.9.2

Точката *P** се нарекува **центар на конечна ротација**.

Ако **поместувањето на рамнинска фигура е транслаторно, двете симетрали n_A и n_M се паралелни, центарот на конечната ротација е во бесконечност, односно не постои** (Сл.3.9.3).



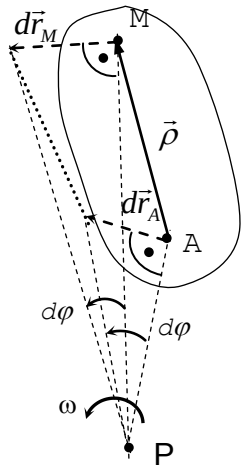
Сл.3.9.3

14. Моментален центар на ротација

Нека **двете положби се безконачно блиски**, точките A и M добиваат **елементарни поместувања** $\overrightarrow{dr_A}$ и $\overrightarrow{dr_M}$.

Пресекот на симетралите на елементарните поместувања се совпаѓаат со пресекот на нормалите на елементарните поместувања и се определува точката *P*, која е наречена моментален центар на ротација. Завртувањето е извршено за елементарен агол $d\varphi$.

Елементарно поместување на точката М е $dr_M = \overline{PM} \cdot d\varphi$, а на точката А е $dr_A = \overline{PA} \cdot d\varphi$, (Сл.3.9.4).



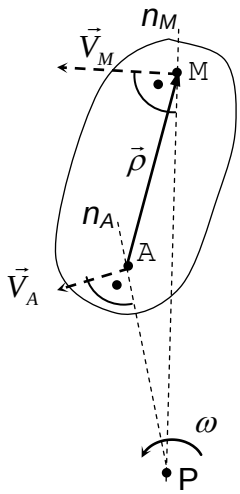
Сл.3.9.4

Со помош на моменталниот центар на ротацијата, компланото движење во даден момент се заменува со ротационото движење околу истиот пол.

Ако векторот $\overrightarrow{dr_A}$ и $\overrightarrow{dr_M}$ се поделат со елементарното време, се добиваат брзините на точките А и М:

$$\overrightarrow{V_A} = \frac{\overrightarrow{dr_A}}{dt} = \overline{PA} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \overline{PA} \cdot \omega; \qquad \overrightarrow{V_M} = \frac{\overrightarrow{dr_M}}{dt} = \overline{PM} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \overline{PM} \cdot \omega \qquad (2.59)$$

Според претходното, **моментален пол на ротација се добива со пресекот на нормалите на брзините на двете точки**. Оваа точка е наречена и **моментален пол на брзините** (Сл.3.9.5).



Сл.3.9.5

Моментален пол на брзините "P" е неподвижна точка која лежи во рамнината на движењето на рамнинска фигура и околу која во даден момент фигурата извршува ротација, што значи дека брзината во оваа точка е еднаква на нула.

15. Брзина на точка при комплано движење

Брзината на произволна точка М се определува од изводот на векторот на положбата $\vec{r}$ по времето, т.е:

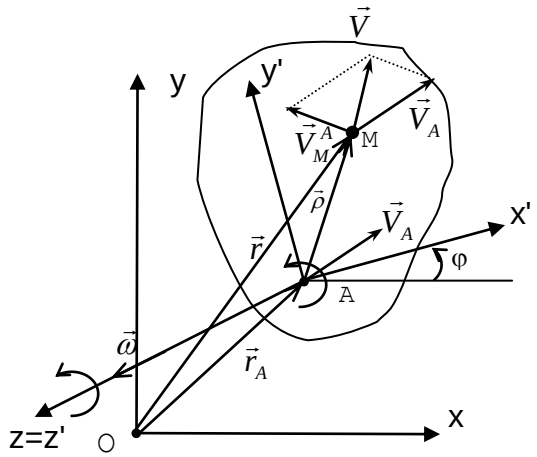
$$\vec{V} = \vec{V}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_A + \vec{\rho}\right) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_A + \vec{V}_M^A = \vec{V}_A + \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right] \qquad (3.10.1)$$

Брзината на точката М се добива од векторски збир од брзината на полот А и брзината од ротацијата на фигурата околу истиот пол.

Брзината на полот А, како прва компонента, се определува со изводот на векторот на положбата на точката А , по времето.

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}\right) = \frac{dx_A}{dt}\vec{i} + \frac{dy_A}{dt}\vec{j} \qquad (3.10.2)$$

Втората компонента од ротацијата околу полот, се определува според Ојлеровата формула: $\vec{V}_M^A = \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right]$, каде е $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$.



Агловата брзина е: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, а соодветниот вектор е $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$, е вектор чиј правец и насока се совпаѓаат со правецот и насоката на замислената оска на ротација во А.

Правецот на оваа брзина е нормален на правецот $\overline{AM}$, односно на ρ, а насоката се совпаѓа со насоката на ротацијата на фигурата околу полот А .

Интензитетот се определува преку интензитетот на векторскиот производ.

$$V_M^A = \omega \cdot \rho \cdot \sin 90° = \omega \cdot \rho = \omega \cdot \overline{AM} \qquad (3.10.3)$$

каде е: $\vec{\omega} \perp \vec{\rho}$.

Во случај ако е ω=0, брзината на точката М, од ротација во точката А е еднаква на нула, односно $\vec{V}_M^A = 0$, а останува брзината на полот А која се пренесува во М, односно $\vec{V}_M = \vec{V}_A$. Фигурата во овој случај се движи транслаторно.

Ако полот А е неподвижен, брзината $\vec{V}_A = 0$, а брзината во точката М се определува според Ојлеровата формула $\vec{V}_M = \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right]$. Фигурата во овој случај ротира во сопствената рамнина, околу замислена неподвижна оска која минува низ А и стои нормално на фигурата.

Од приложените случаи, може да се констатира дека компланото движење е сложено движење и е составено од едно транслаторно движење пренесено од полот А врз точките на фигурата и релативно добиено од ротација на фигурата околу замислена оска која минува низ полот А.

Од векторската равенка за брзина на точка М, т.е. $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right]$, **произлегуваат проекциите во однос на Декартовиот координатен систем**:

$$\vec{V}_M = \dot{x}_A \cdot \vec{i} + \dot{y}_A \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \rho_x & \rho_y & 0 \end{vmatrix}$$

односно:

$$V_x = \dot{x}_A - \omega \cdot \rho_y$$
$$V_y = \dot{y}_A + \omega \cdot \rho_x \qquad (3.10.4)$$

Од равенките (2.63) можат да се определат интензитетот, правецот и насоката на брзината на точката М: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$; $tg\alpha_V = \dfrac{V_y}{V_x}$.

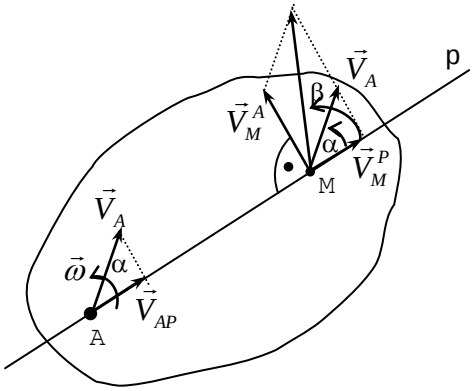
Од векторските равенки за определување на брзина на точка при комплано движење се добиваат и горенаведените скаларни (аналиички) равенки.

Брзините на точки од рамнинската фигура можат да се определат и со примена на теореми кои произлегуваат од својствата на компланото движење.

16. Теорема за проектирани брзини

Теорема за проектирани брзини гласи: **Проекциите на брзините на било кои две точки од фигурата по правата која ги поврзува се еднакви помеѓу себе, т.е:**

$$V_{AP} = V_{MP} \qquad (3.10.5)$$



Од Сл.3.10.2 може да се докаже равенството (3.10.5). Ако точката А , се усвои за пол на ротација, брзината на точката М се определува од геометрискиот збир на векторот на брзината на точката А, $\vec{V}_A$ и векторот на брзината од ротацијата во полот А, $\vec{V}_M^A$, т.е. $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_M^A$.

На Сл.3.10.2 се гледа проекцијата на брзината на точката М по правецот $\overline{AM}$ совпадната со проекцијата на брзината на точката А по истиот правец.

$$V_M \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha \qquad (3.10.6)$$

Од (3.10.6), може да се констатира дека **во случај на дадена брзина на една точка и даден правец на брзина на друга точка, може да се определи нејзиниот интензитет**, односно:

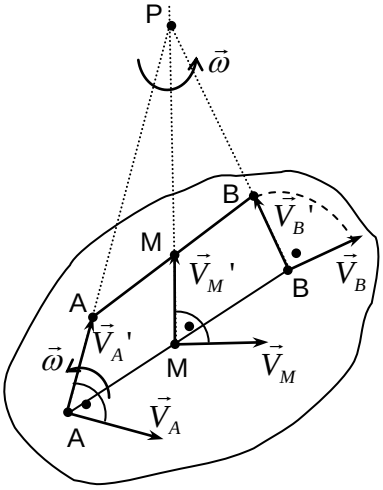
$$V_M = V_A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (3.10.7)$$

17. Теорема на извртени брзини

За графичко прикажување, а истовремено и определување на брзини на точки од рамнинска фигура, се користи теорема на извртени брзини.

Под **поимот извртена брзина $\vec{V}'$ се подразбира брзина определена со ротација на векторот на брзината на точката за агол од 90° во насоката на ротацијата.** Во пресекот на правците на извртените брзини се определува моменталниот пол на

брзините *P*. Ако се поврзат две точки А и В од фигурата и соодветните краеви на извртените брзини се добива отсечката $\overline{A'B'}$. Според теоремата на извртените брзини, краевите на извртените брзини на точките од отсечката $\overline{AB}$, ќе лежат на отсечката $\overline{A'B'}$ која е паралелна на $\overline{AB}$.



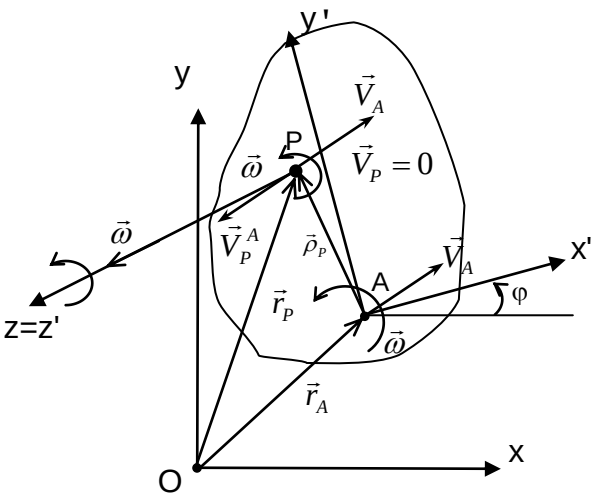
Брзината на произволна точка М која лежи на правецот $\overline{AB}$ се определува по гроафички пат. Точката М се поврзува со моменталниот пол на брзините Р. Пресекот на отсечките $\overline{MP}$ и $\overline{A'B'}$ ја определува точката М', а со тоа е оопределена и извртената брзина $\vec{V}'_M = \overrightarrow{MM'}$ (Сл.3.10.3).

Со ротација на извртената брзина $\vec{V}'_M = \overrightarrow{MM'}$ за агол од 90° во насока спротивна на насоката на агловата брзина ω (Сл.3.10.3) се добива векторот на брзината на точката М, т.е. $\vec{V}_M$.

18 моментален пол на брзини

При комплано движење на рамнинска фигура во сопствената рамнина во секој момент постои една точка Р во која е брзината еднаква на нула. Таа точка е наречена **моментален пол на брзините или моментален пол на ротацијата**. **Компланото движење на рамнинска фигура во даден момент може да се замени со ротација околу моменталниот пол на брзините**.

Ако се познати положбите на моменталните полови на брзините во некој временски интервал на движење, тогаш компланото движење е оформено од збирот на бесконачно многу елементарни ротации околу соодоветниот бесконачен збир на моменталните полови на брзините. Брзината на оваа точка е еднаква на нула, односно $B_p = 0$ (Сл. 3.11.1).



Сл. 3.11.1

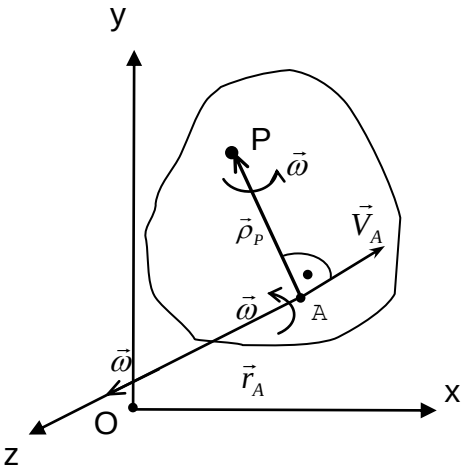
За да се определи **положбата $\vec{r}_p$ на моменталниот пол на брзините во однос на координатниот систем Oxy**, се тргнува од дефинирано комплано движење преку подвижниот триедар Ax'y', т.е:

$x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$

Нека е брзината во точката А, $\vec{V}_A = \dot{x}_A \cdot \vec{i} + \dot{y}_A \cdot \vec{j}$, тогаш брзината во Р изнесува:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_P^A = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}_P] = 0 \qquad (3.11.1)$$

каде е: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{k}$, а $\vec{\rho}_P$ вектор на положба на Р , во однос на Ax'y'.



Положбата на моменталниот пол на брзината во однос на неподвижниот координатен систем Oxy е определена преку координатите на векторот на положбата $\vec{r}_P$.

$$x_P = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\omega}$$
$$y_P = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\omega} \qquad (3.11.9)$$

Со координатите x_P и y_P се определува законот на движењето на точката P, а со тоа е определена и положбата на моменталниот пол на брзината во секој момент. **Траекторијата на точката P** која е дефинирана во однос на неподвижниот координатен систем Oxy е наречена **неподвижна центроида**.

Положбата на моменталниот пол на брзината "P" може да се определи и во однос на подвижниот координатен систем Ax'y', преку координатите на векторот $\vec{\rho}_P$:

$$\vec{\rho}_P = \frac{\left[\vec{\omega}, \vec{V}_A\right]}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}_A' & \dot{y}_A' & 0 \end{vmatrix}$$

односно:

$$x_P = -\frac{\dot{y}_A'}{\omega}$$
$$y_P = \frac{\dot{x}_A'}{\omega} \qquad (3.11.10)$$

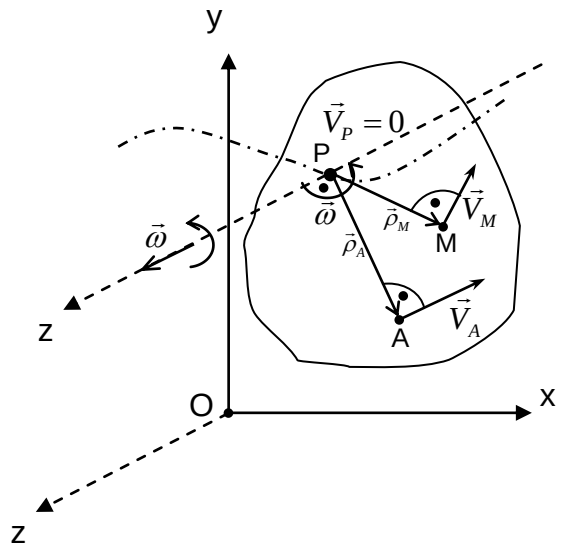
19. Брзина на произволна точка при комплано движење преку моментален пол на брзини

Со определена положба на моменталниот пол на брзините, односно точката P, компланото движење на рамнинската фигура во даден момент се заменува со ротационо движење околу замислена оска која минува низ полот P. (Сл.3.11.3). **Полот P се усвојува за референтна точка** во однос на која се определуваат положбите и брзините на произволни точки од фигурата.

Брзината на било која точка M од фигурата се добива според Ојлеровата формула:

$$\vec{V}_M = \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}_M\right]$$

каде е: $\vec{\rho}_M \cong \overrightarrow{PM}$.

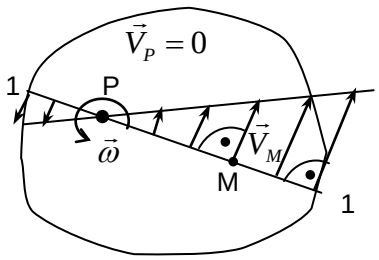


сл.3.11.3

Може да се заклучи дека брзините на точките од рамнинска фигура имаат правци нормални на правецот кој ја поврзува точката со моменталниот пол на брзините P и насока еднаква со насоката на ротацијата. Интензитетот на брзините е пропорционален со растојанието од моменталниот пол на брзините до точката, односно:

$$V_M = \omega \cdot \rho_M = \omega \cdot \overline{PM}$$

На Сл.3.11.4 е прикажан дијаграм на брзината на правецот 1-1 кој минува низ моменталниот пол на брзините. Од линеарната распределба на брзините следува дека за определување на брзините на точките од правецот 1-1 доволна е само една точка, на пример точката M, т.е. $\vec{V}_M$.



Сл. 3.11.4

Од претходно изложеното може да се заклучи практичната примена на карактеристичната точка **моменталниот пол на брзините**.

20 ЗАБРЗУВАЊЕ ПРИ КОМПЛАНО ДВИЖЕЊЕ

Векторот на забрзувањето на произволна точка од рамнинската фигура која се движи комплано се определува со диференцирање на векторот на брзината по времето, т.е.

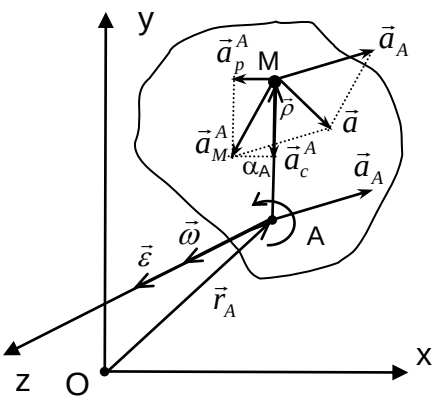
$$\vec{a} = \vec{a}_M = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}]\right) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\rho}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right] =$$
$$= \frac{d\vec{V}_A}{dt} + [\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{\rho}]] \qquad (3.12.1)$$

Двојниот векторски производ, може да се изрази преку идентитетот од векторската алгебра:

$$\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]\right]=\vec{\omega}\left(\vec{\omega},\vec{\rho}\right)-\omega^2\vec{\rho}=-\omega^2\vec{\rho} \qquad (3.12.2)$$

Со замена во (3.12.1) , се добива:

$$\vec{a}=\vec{a}_A+\left[\vec{\varepsilon},\vec{\rho}\right]-\omega^2\vec{\rho} \qquad (3.12.3)$$



Sl. 3.12.1

каде се:

$\vec{a}_A=\ddot{x}_A\cdot\vec{i}+\ddot{y}_A\cdot\vec{j}$ - **компонента од транслаторно движење на точката А, во однос на Оху.**

$\left[\vec{\varepsilon},\vec{\rho}\right]=\vec{a}_p^A$ - **компонента од ротационо (тангенцијално) забрзување од ротација околу оската Аз.**

$-\omega^2\vec{\rho}=\vec{a}_c^A$ - **компонента од центрипетално (нормално) забрзување од ротацијата околу оската Ау** (Сл.3.12.1).

Интензитетите на компоненталните забрзувања се определуваат од следните изрази:

$$\begin{aligned} a_A&=\sqrt{\ddot{x}_A^2+\ddot{y}_A^2}\\ a_p^A&=\varepsilon\cdot\rho=\varepsilon\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\\ a_c^A&=\omega^2\cdot\rho=\omega^2\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\end{aligned} \qquad (3.12.4)$$

Проекциите на забрзувањето $\vec{a}$ во однос на Оху се определуваат со проектирање на векторската равенка (3.12.3), односно:

$$\vec{a}=\ddot{x}_A\cdot\vec{i}+\ddot{y}_A\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varepsilon\\ \rho_x & \rho_y & 0\end{vmatrix}-\omega^2\left(\rho_x\cdot\vec{i}+\rho_y\cdot\vec{j}\right)$$

каде е:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}&=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'=x'\left(\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}\right)+y'\left(-\sin\varphi\cdot\vec{i}+\cos\varphi\cdot\vec{j}\right)\\ &=\left(x'\cdot\cos\varphi-y'\cdot\sin\varphi\right)\cdot\vec{i}+\left(x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi\right)\cdot\vec{j}=\rho_x\cdot\vec{i}+\rho_y\cdot\vec{j}\end{aligned}$$

Следува:

$$\begin{aligned} a_x&=\ddot{x}_A-\varepsilon\left(x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi\right)-\omega^2\cdot\left(x'\cdot\cos\varphi-y'\cdot\sin\varphi\right)\\ a_y&=\ddot{x}_A-\varepsilon\left(x'\cdot\cos\varphi-y'\cdot\sin\varphi\right)-\omega^2\cdot\left(x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi\right)\end{aligned} \qquad (3.12.4)$$