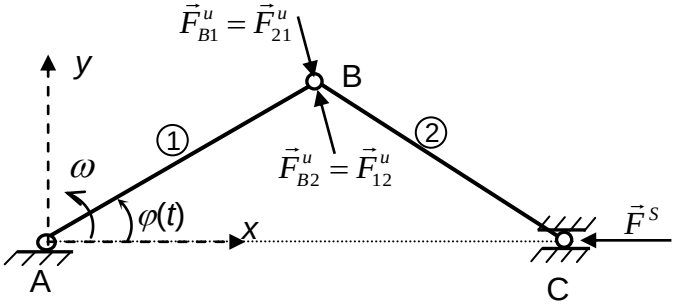
1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛЕН СИСТЕМ

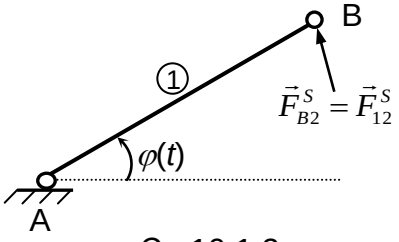
Материјален систем претставува збир од материјални тела или материјални точки кои се заемно поврзани со помош на врски така да движењето на секое тело или точка е зависно од движењето на останатите тела или точки од системот. Во динамиката на материјални системи треба да се изучи движењето како резултат од дејството на останатите тела или точки кои не се составен дел на системот. Дејството од овие тела (точки) се изразува преку сили, кои се наречени надворешни сили $\vec{F}_i^S$. Надворешните сили можат да бидат активни $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$ и реакции на врски (добиени со користење на принципот на ослободување од врски). Истите ќе влијаат врз движењето на материјалниот систем. Но, освен надворешните сили, материјалниот систем е под дејство и на внатрешни сили $\vec{F}_i^U$ кои се последица на взаемното дејство помеѓу телата и точките на материјалниот систем (III Њутнов закон).

Пример, клипниот механизам A,B,C кој се движи комплано е под дејство на хоризонтална сила $\vec{F}^S$ во точката C и истата придонесува за промената на неговата положба (Сл.10.1.1). Хоризонталното поместување на точката C, ќе овозможи материјалниот стап $\overline{AB}$ да врши ротација околу оска која минува во неподвижната потпора A, а материјалниот стап $\overline{BC}$ да се движи комплано во рамнината *Oxy*.



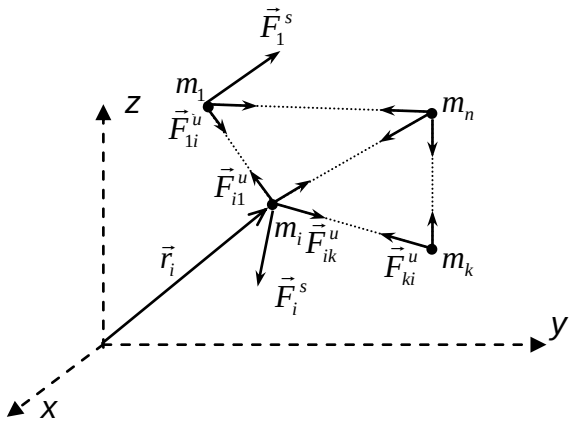
Сл.10.1.1

Материјалниот систем ABC, кој е оформен од крути материјални стапови взаемно поврзани со зглоб, неподвижна потпора A и лизгач во C содржи и внатрешни сили $\vec{F}_i^U$, тоа се две еднакви и спротивни сили кои дејствуваат помеѓу телата од системот. На пример, помеѓу двата стапа во зглобот (Сл.10.1.1) каде е $\vec{F}_{B2}^U = -\vec{F}_{B1}^U$ или $\vec{F}_{12}^U = -\vec{F}_{21}^U$. Со $\vec{F}_{12}^U$ е означен притисокот на стап (1) од дејството на стапот (2) и спротивно со $\vec{F}_{21}^U$ притисокот на стапот (2) од стап (1). Може да се заклучи дека внатрешните сили секогаш се појавуваат во парен број и взаемно се поништуваат. Нека материјалениот систем A,B,C се раздвои во B на два дела и нека се разгледа остатокот AB (Сл.10.1.2). Влијанието од стапот (2) врз (1) се пренесува преку силата $\vec{F}_{12}$ која станува надворешна и активна сила на стапот (1), односно $\vec{F}_{B2} = \vec{F}_{12}^S$.



Сл.10.1.2

Поделбата на силите на внатрешни и надворешни е условена во зависност од припадноста на поедините тела на материјалниот систем.



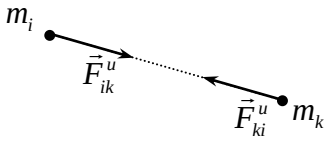
Сл.10.1.3

Нека е даден систем од *н* материјални точки со маси $m_1, m_2, \ldots m_u, \ldots m_н$ и нека секоја точка е под дејство на резултанта од надворешни сили $\vec{F}_i^S$. Взаемното поврзување помеѓу поедините материјални точки е овозможено од дејство на внатрешните сили (Сл.10.1.3).

Внатрешните сили помеѓу две избрани точки m_u и $m_к$ се еднакви по интензитет и правец, а спротивни по насока, односно:

$$\vec{F}_{iK}^U = -\vec{F}_{Ki}^U \qquad (10.1.1)$$

каде е $\vec{F}_{iK}^U$ сила преку која е изразено дејството на точката m_u од точката $m_к$, и спротивно со $\vec{F}_{Ki}^U$ е изразено дејството на точката $m_к$ од точката m_u (Сл.10.1.4).



Сл.10.1.4

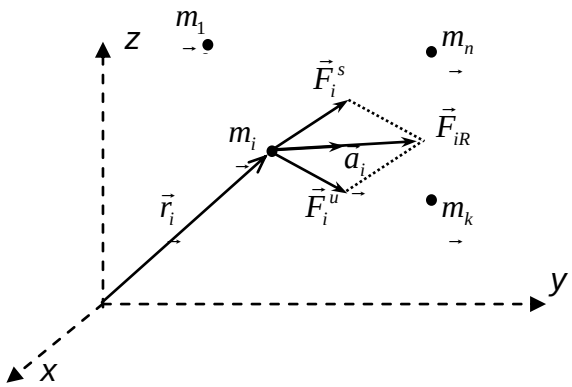
Од взаемното еднакво дејствување на поедините точки од системот може да се заклучи дека внатрешните сили се појавуваат во парен број и за вкупниот систем векторскиот (геометриски) збир е еднаков на нула односно:

$$\sum_1^n \vec{F}_{iK}^u = \vec{R}^u = 0 \qquad (10.1.2)$$

Ако равенката (10.1.2) се помножи векторски со векторот на положбата $\vec{r}_i$, се добива следнава векторска равенка:

$$\sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{iK}^u\right] = \sum_1^n \vec{M}_{0i}^u = 0 \qquad (10.1.3)$$

Со равенката (10.1.3) се докажа дека влијанието од моментите на внатрешните сили на материјалниот систем во однос на координатниот почеток полот О, а во однос на било кој избран пол секогаш е еднакво на нула.



Сл.10.1.5

Диференцијалните равенки на движење на поедините точки од системот (користејќи го принципот на ослободување) се добиваат според Вториот Њутнов закон (Сл.10.1.5).

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^u \quad (i = 1,2,3.....n) \qquad (10.1.4)$$

каде се: $\vec{a}_i = \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ -вектор на забрзувањето, $\vec{F}_i^S$ - резултанта од надворешни сили, и $\vec{F}_i^u$ - резултанта од внатрешни сили.

Со извршено проектирање на равенката (10.1.4) во однос на координатниот систем Oxyz се добиваат следните диференцијални равенки:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{ix}{}^{S} + F_{ix}{}^{u}$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{iy}{}^{S} + F_{iy}{}^{u} \qquad (i = 1,2,3.....n) \qquad (10.1.5)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{iz}{}^{S} + F_{iz}{}^{u}$$

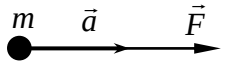
Со почетните услови на движењето на материјалните точки од системот и по извршената интеграција на трите диференцијални равенки наполно се определува движењето на материјалниот систем.

ДАЛАМБЕРОВ ПРИНЦИП

Даламберовиот принцип припаѓа во групата на таканаречените диференцијални принципи кои ни овозможуваат оформување на диференцијалните равенки на движење на материјалните системи. Во динамиката е наречен кинетостатички метод кој се користи за определување на динамичките реакции на врски. Законите кои се дефинирани во статиката преку Даламберовиот принцип се искористени и во динамиката.

2 Даламберов принцип за слободна материјална точка.

Нека е дадена слободна материјална точка со маса *м* која се движи во просторот под дејство на сила $\vec{F}$. Точката добива забрзување $\vec{a}$ пропорционално на силата, а обратно пропорционално на масата. Силата $\vec{F}$ е ефективната сила која врши промена на движењето, по интензитет, правец и насока, а масата игра улога на инертно (спротивно) дејство, односно го намалува интензитетот на забрзувањето (Сл.10.2.1).

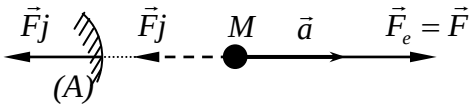


$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Sl.10.2.

Даламбер (француски научник кој живеел и творел во периодот 1717-1783 год.) вовел поим на инерцијална сила, фиктивна сила која дејствува на материјална точка која се движи по дејство на сила $\vec{F}$. (Сл.10.2.2.).

Од II Њутнов закон $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ произлегува инерцијална сила $\vec{F}j$:



Сл.10.2.2

$$\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$$

$\vec{F} + \vec{F}j = 0$, односно:

$$\vec{F}j = -m \cdot \vec{a} \qquad (10.2.1)$$

Од равенката (10.2.1) се определува фиктивната сила $\vec{F}j$, која е наречена и инерцијална сила.

Инерцијалната сила $\vec{F}j$ е реактивна сила која за време на движењето не дејствува на материјална точка туку врз телото “А” кое го овозможува движењето на материјалната точка (Сл.10.2.2).

Со воведувањето на поимот за фиктивна сила $\vec{F}j$, односно инерцијална сила која е наречена и Даламберова сила, се оформува и Даламберовиот принцип за слободна материјална точка која гласи:

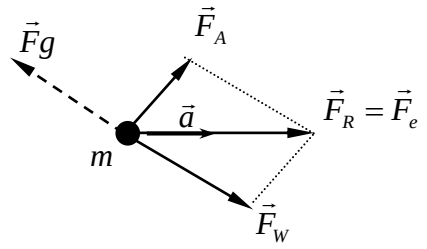
Ефективната сила $\vec{F}e = \vec{F}$ и Даламберовата сила $\vec{F}j$ ја одржуваат материјална точка во рамнотежа односно:

$$\vec{F} + \vec{F}j = 0 \qquad (10.2.2)$$

Со равенката (10.2.2) е дефинирана фиктивната равенка за рамнотежа на подвижна материјална точка, која е наречена равенка на динамичка рамнотежа.

3. Даламберов принцип за неслободна материјална точка.

Нека е дадено движењето на неслободна материјална точка. Со користење на принципот на ослободување, точката е под дејство на активната сила $\vec{F}_A$ и реакцијата на врска $\vec{F}_W$. Резултантата $\vec{F}_R$ е:



Сл.10.2.3

$\vec{F}_R = \vec{F}_A + \vec{F}_W$ е ефективната сила $\vec{F}_e$ која врши промена на движењето, односно $\vec{F}_e = \vec{F}_R$.

Динамичката равенка на движење, според II Њутнов закон:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R \qquad \text{или:} \quad m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W \qquad (10.2.3)$$

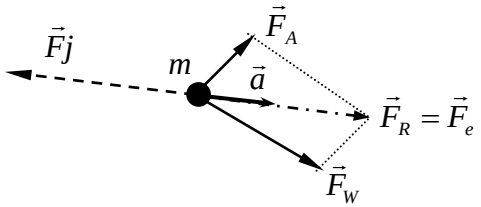
Даламбер воведува поим за изгубена сила, односно фикттивна (замислена) сила која дејствува врз материјалната точка, односно:

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_W$$

Според Даламбер , **движењето се врши под дејство на ефективната сила $\vec{F}_e = \vec{F}_R$, а активната сила $\vec{F}_A$ се разложува во ефективна $\vec{F}_e$ и така наречената изгубена сила $\vec{F}_g$ која за време на движењето е во рамнотежа со реакцијата на врската $\vec{F}_W$.**

Оваа формулација е наречена прва или основна формулација на Даламберов принцип за неслободна материјална точка.

Даламбер, со воведувањето на т.н. инерцијална сила $\vec{F}j = -m \cdot \vec{a}$, исто така фиктивната сила, која дејствува на неслободната материјална точка, ја оформува и втората практична формулација на својот принцип.



Сл.10.2.4

Од динамичката равенка на движење на неслободна материјална точка:

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R$, односно $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W$ произлегува следното равенство:

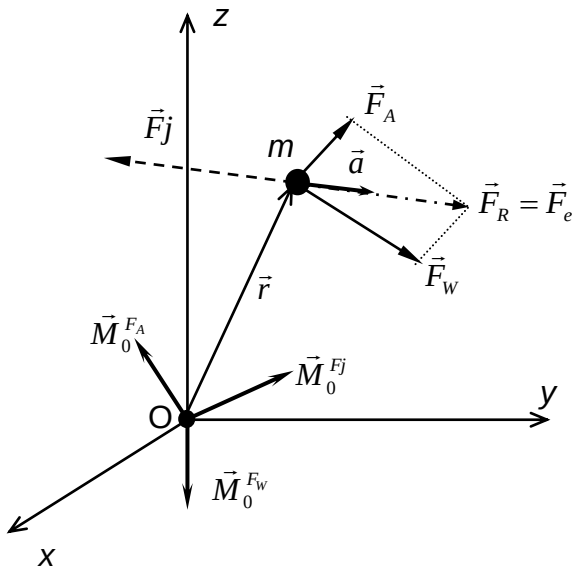
$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \left(-m \cdot \vec{a}\right) = 0 \text{, или}$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \vec{F}_j = 0 \qquad (10.2.4)$$

Од равенката (10.2.4) произлегува втората формулација на Даламберов принцип која гласи:

Активната сила $\vec{F}_A$, реакцијата на врска $\vec{F}_W$ и инерцијалната сила $\vec{F}_A$ ја одржуваат во рамнотежа неслободната подвижна материјална точка. Се работи за условена рамнотежа наречена и динамичка рамнотежа на неслободна материјална точка.

Даламберовиот принцип може да се дефинира и преку моментна равенка:



сл. 10.2.5

Нека равенката (10.2.4) се помножи векторски со векторот $\vec{r}$.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \vec{F}_j = 0 / \cdot \vec{r}$$

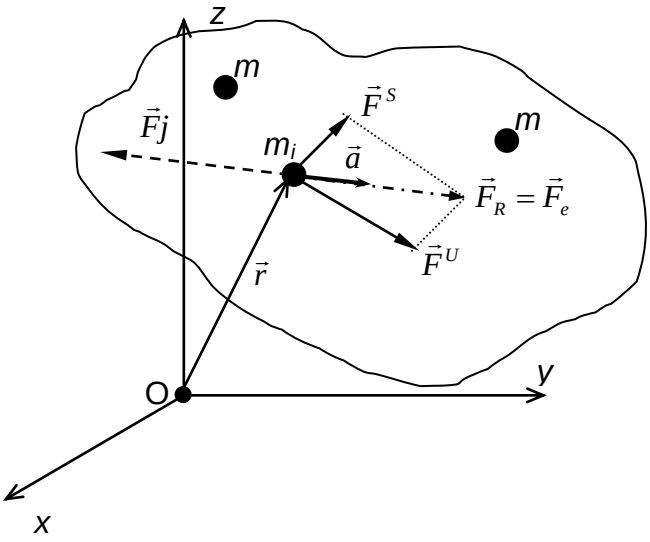
$$\left[\vec{r}, \vec{F}_A\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_W\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_j\right] = 0 \text{, или}$$

$$\vec{M}_0^{(\vec{F})} + \vec{M}_0^{(\vec{F}_W)} + \vec{M}_0^{(\vec{F}_J)} = 0 \qquad (10.2.5)$$

Моментот од активната сила, моментот од реакцијата на врска и моментот од инерцијал-ната сила, неслободната материјална точка ја одржуваат во рамно-тежа. Станува збор за динамичкат а рамнотежа изразена преку моментите од силите кои дејствуваат врз точката во однос на координатниот почеток О.

4. Даламберов принцип за материјален систем.

Нека е даден материјален систем од “n” материјални точки. Секоја точка со маса m_i е под дејство на Даламберовата сила $\vec{F}j = -m\vec{a}$, и резултантата $\vec{F}_R$ определена од векторскиот збир на резултанта од надворешните сили $\vec{F}^S$ и резултанта од внатрешните сили $\vec{F}^U$, односно:



Sl.10.2.6

$$\vec{F}^S = \sum \vec{F} + \sum \vec{F}_W$$
$$\vec{F}^U = \sum \vec{F}_{ik}^U$$

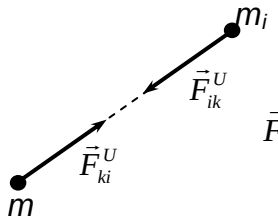
Даламберовиот принцип за точка од системот гласи :

$$\vec{F}^S + \vec{F}^U + \vec{F}_j = 0 \ (i = 1,2,.....n) \qquad (10.2.6)$$

Резултантата од надворешните сили (активни и реакции на врски од надворешни тела), резултантата од внатрешните сили и инерцијалната сила, точката од системот ја одржуваат во рамнотежа.

Даламберовиот принцип за системот од материјални точки гласи:

$$\sum_1^n \vec{F}^S + \sum_1^n \vec{F}^U + \sum_1^n \vec{F}_j = 0 \qquad (i = 1,2,.....n)$$



$$\vec{F}_{ik}^U = -\vec{F}_{ki}^U$$

Сл.10.2.7

Резултантата од сите внатрешни сили $\sum_1^n \vec{F}^U = \sum_1^n \sum \vec{F}_{ij}^U = 0$, како резултат на парниот број и заемното поништување. $\left(\vec{F}_{ik}^U = -\vec{F}_{ki}^U\right)$.

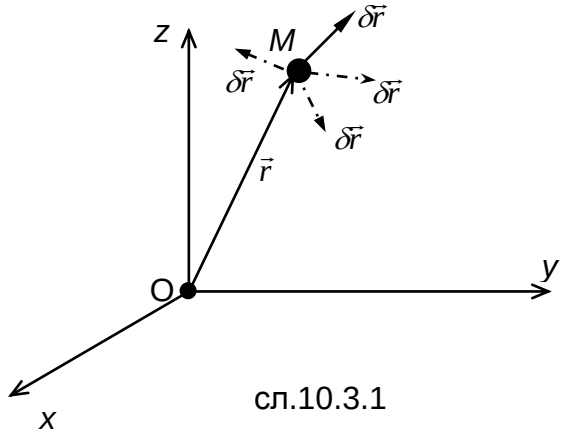
Според Даламберовиот принцип:

$$\sum_1^n \vec{F}^S + \sum_1^n \vec{F}_j = 0 \qquad (10.2.7)$$

Резултантата од сите надворешни сили и резултантата од сите инерцијални сили, материјалниот систем го одржуваат во рамнотежа.

5. ВИРТУЕЛНО ОВОЗМОЖЕНО ПОМЕСТУВАЊЕ НА МАТЕРИЈАЛЕН СИСТЕМ

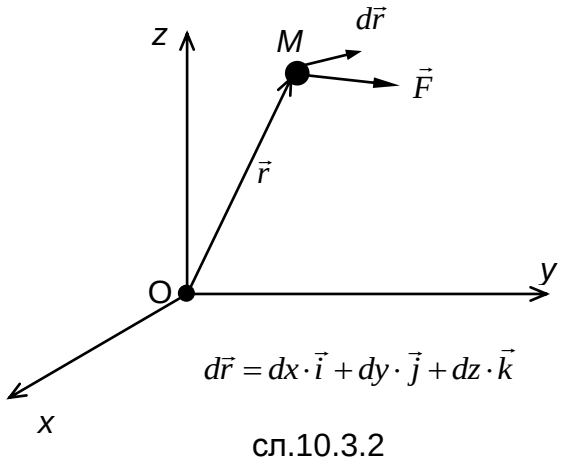
Под виртуелно овозможено поместување на материјален систем се подразбира секое замислено бесконечно мало поместување на неговите точки кои во дадена положба (даден момент на време) го дозволуваат врските на кој е изложен истот. Со виртуелното поместување не треба да биде променета дадената положба на материјалниот систем.



сл.10.3.1

Слободна точка во простор има бескрајно многу виртуелни овозможени поместувања без да биде променета нејзината положба (Сл.10.4.1). Ако со $\delta\vec{r}$ се означи нејзиното виртуелно поместување, тогаш елементарните проекции на овој вектор во Декартовиот координатен систем се δx, δy, δz, односно:

$$\delta\vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k} \qquad (10.3.1)$$



сл.10.3.2

Ако точката М е под дејство на сила $\vec{F}$ вистинското елементарно поместување во дадена положба $d\vec{r}$ ќе се совпадне со едно од бесконечните виртуелни поместувања (Сл.10.4.2).

Виртуелните поместувања не зависат од дејството на силите, а зависат од врските на кои е изложена материјалната точка.

6. ВИРТУЕЛНА РАБОТА. ИДЕАЛНИ ВРСКИ

Виртуелна работа е работата на сила добиена при виртуелното овозможено елементарно поместување на нејзината нападна точка. Се работи за елементарна работа, означена со δA, и определена по аналогија на дефиницијата за елементарна работа на сила, односно:

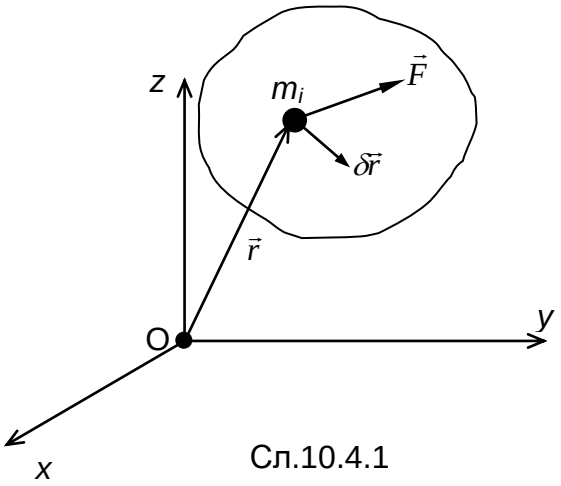
$$\delta A = \left(\vec{F}, \delta\vec{r}\right) \qquad (10.4.1)$$

Во Декартовиот координатен систем равенката (10.4.1) може да се изрази во следна форма:

$$\delta A = Fx \cdot \delta x + Fy \cdot \delta y + Fz \cdot \delta z \qquad (10.4.2)$$

За точки од материјалниот систем кои се изложени на виртуелни овозможени поместувања, виртуел-ната работа на силите кои дејствуваат врз системот се добива со сумата на виртуелните работи на поедините сили, (Сл.10.4.1), односно:

$$\sum_{1}^{n}\delta A_i = \sum_{1}^{n}\left(\vec{F},\delta\vec{r}\right)=\sum_{1}^{n}\left(F_i x\cdot\delta_{ix}+F_i y\cdot\delta_{iy}+F_i z\cdot\delta_{iz}\right) \qquad (10.4.3)$$



Сл.10.4.1

Ефектот од врските на материјалниот систем се манифестира врз забрзувањето на поедините точки од системот, како резултат од реакциите на врските кои можат да бидат идеални или реални.

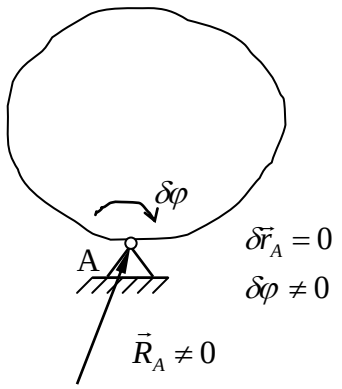
Идеални врски се дефинираат со помошта на виртуелната работа на реакциите на врските. За идеална врска се усвојува врската кај која е задоволен условот виртуелната работа на реакцијата на врската при виртуелно овозможено поместување на нејзината нападна точКа да е еднаквио на нула, односно:

$$\delta A=\left(\vec{F}_W,\delta\vec{r}_W\right)=0 \qquad (10.4.4)$$

7. ПРИМЕРИ НА ИДЕАЛНИ ВРСКИ

За идеални врски кои се користат во динамиката на материјалните системи можат да се наведат следниве:

Крута плоча (диск) потпрен во точката А на неподвижен зглоб (Сл.10.4.2).

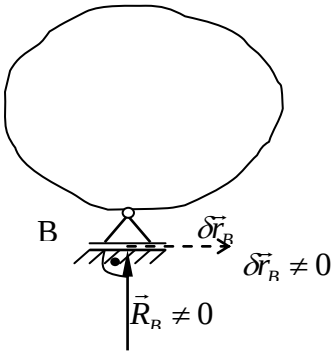


Сл.10.4.2

Виртуелното овозможено поместување на точката А е $\delta r_A=0$. Следува дека и виртуелната работа $\delta A=0$, односно:

$$\delta A=\left(\vec{R}_A,\delta\vec{r}_A\right)=R_A\cdot\delta r_A\cdot\cos\alpha_A=0 \qquad (10.4.5)$$

Крута плоча (диск) потпрен во точката В на подвижна потпора (лежиште) (Сл.10.4.3).

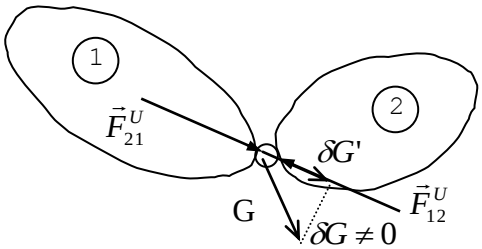


Сл.10.4.3

Виртуелното овозможено поместување е $\delta\,\vec{r}_B$ е ортогонално со реакцијата на врската $P_Б$. Следува дека и виртуелната работа на реакцијата на врска $\delta A = 0$ (Сл.10.4.3).

$$\delta A = \left(\vec{R}_B, \delta\vec{r}_B\right) = R_B \cdot \delta r_B \cdot \cos 90° = 0 \qquad (10.4.6)$$

Подвижен зглоб кој поврзува две крути плочи 1 и 2.

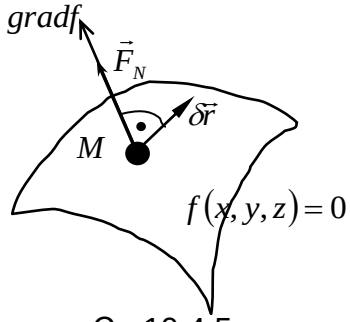


Сл.10.4.4

Во зглобот “G” заемното дејство од дватадиска, (според третиот Њутнов закон) е определено со две спротивни и еднакви сили $\vec{F}_{12}^{U} = -\vec{F}_{21}^{U}$. Ако зглобот G виртуелно се помести, работата на внатрешните сили:

$$\delta A = \left(\vec{F}_{12}^{U}, \delta_{\vec{G}}\right) + \left(\vec{F}_{21}^{U}, \delta_{\vec{G}}\right) = F_{12} \cdot \delta_{G'} - F_{21} \cdot \delta_{G'} = 0$$

Материјална точка која лежи на идеална холономна стационарна површина *f(x,y,z)* = 0



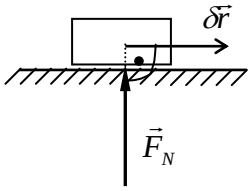
Сл.10.4.5

Реакцијата на врската $\vec{R} = \vec{F}_N$ е колинеарна со $gradf$, виртуелното овозможено поместување $\delta\vec{r}$ е ортогонално на $\vec{R}$.

Виртуелната работа е:

$$\delta A = \left(\vec{F}_N, \delta\vec{r}\right) = 0 \qquad (10.4.8)$$

Лизгање на тело по глатка рамнина

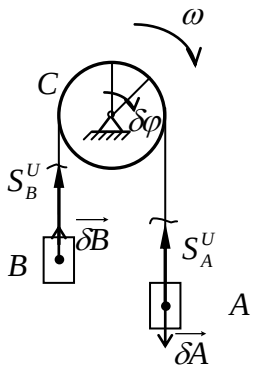


Сл.10.4.6

Реакцијата на врската односно од рамнината $\vec{F}_N$ е нормална на поместувањето, односно на овозможеното виртуелно поместување (поместување во даден момент), односно: $\vec{F}_N \perp \delta\vec{r}$

$$\delta A = \left(\vec{F}_N, \delta\vec{r}\right) = 0 \qquad (10.4.9)$$

Нерастегливо јаже обвиено околу макара С

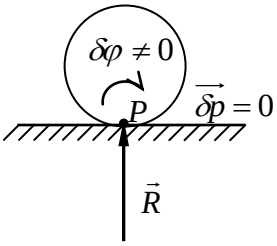


Сл.10.4.7

Виртуелното овозможено поместување на телото А, ќе се пренесе на телото В, односно $\delta A = \delta B$. Виртуелната работа на силата во јажето:

$$\delta A = \left(\vec{S}_A^U, \overrightarrow{\delta_A}\right) + \left(\vec{S}_B^U, \overrightarrow{\delta_B}\right) = -S_A^U \cdot \delta_A + S_B^U \cdot \delta_B = 0 \qquad (10.4.10)$$

Тркалање на кружен диск без лизгање по рамнина



Сл.10.4.8

Во допирот на дискот и рамнината се наоѓа моментален пол на брзината P$\left(\vec{V}_P = 0\right)$. Следува дека виртуелното овозможено поместување $\overrightarrow{\delta_P} = 0$, виртуелното овозможено завртување $\delta\varphi \neq 0$. Виртуелната работа:

$$\delta A = \left(\vec{R}, \overrightarrow{\delta_P}\right) = 0 \qquad (10.4.11)$$

8. ЛАГРАНЖОВ ПРИНЦИП. ДАЛАМБЕР-ЛАГРАНЖОВ ПРИНЦИП

Материјален систем кој е изложен на идеални врски во дадена положба ќе остане во рамнотежа (статичка или динамичка) ако е сумата од елементарните работи на сите сили (нападни или нападни и инерцијални) при секое овозможено виртуелно поместување на материјален систем во дадената положба, еднаква на нула, т.е.:

$$\sum_1^n \delta A_i = \sum_1^n \left(\vec{F}_i^S, \delta\vec{r}_i\right) = 0 \qquad (10.5.1)$$

$$\sum_1^n \delta A_i = \sum_1^n \left(\vec{F}_i^S, \delta\vec{r}_i\right) + \sum_1^n \left(\vec{F}_{ij}, \delta\vec{r}_i\right) = 0 \qquad (10.5.2)$$

Со равенката (10.5.1) е дефиниран **Лагранжовиот принцип** кој се користи во статиката, и гласи: **Збирот од елементарните работи на сите нападни сили при виртуелното овозможено поместување на материјалниот систем во дадената положба да биде еднаков на нула.**

Со равенката (10.5.2) е дефиниран **Даламбер - Лагранжовиот принцип**, според кој**: Збирот од елементарните работи на сите нападни и инерцијални сили при овозможено виртуелно поместување на системот во дадена положба е еднаков на нула.**.

Поимовите инерцијални сили, виртуелни овозможени поместувања, идеални врски на материјалните системи го овозможиле оформувањето на овој принцип, како практичен метод, за решавање на многубројни задачи во динамиката на материјалните системи.

Ако е системот во статичка рамнотежа и инерцијалните сили се еднакви на нула, Даламбер-Лагранжовиот принцип се сведува на Лагранжов принцип. Со примена на Лагранжовиот принцип во статиката се определуваат равенките за рамнотежа на материјалните системи од кој се добиваат непознатите реакции и статички големини..

Во случај кога материјалниот систем е во движење, со помошта на Далмбер - Лагранжовиот принцип се составуваат динамичките диференцијални равенки на движење.

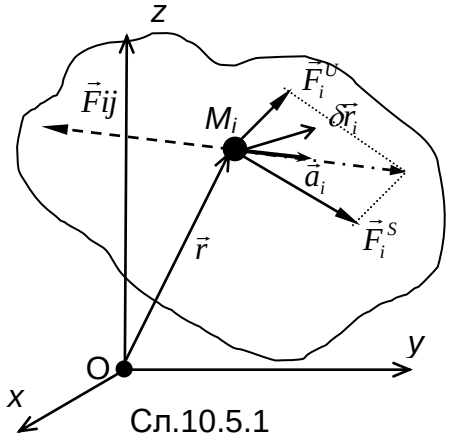
Ако движењето на материјалниот систем е дефинирано преку Декартовите коорднати, равенката (10.5.2) може да се напише во следна форма:

$$\sum_{1}^{n}\left[\left(F_{ix}^{S}-F_{ijx}\right)\delta x_i+\left(F_{iy}^{S}-F_{ijy}\right)\delta y_i+\left(F_{iz}^{S}-F_{ijz}\right)\delta z_i\right]=0 \qquad (10.5.3)$$

каде се : $F_{ix}^{S}, F_{iy}^{S}, F_{iz}^{S}$ - проекции на нападни сили

$F_{ijx}^{S}, F_{ijy}^{S}, F_{ijz}^{S}$ - проекции на инерцијални сили и

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ - проекции на овозможените виртуелни поместувања, односно варијации на координатите на точката во која дејствуваа нападните и инерцијалните сили (Сл.10.5.1)



Сл.10.5.1

Даламбер - Лагранжовиот принцип е во групата на таканаречени диференцијални принципи кои се користат за определување на диференцијалните равенки на движење на материјален систем .

Условите за рамнотежа кои се користат во статиката можат исто така да се определат од следниот аналитички израз:

$$\sum_{1}^{n}\left(F_{ix}^{S}\delta x_i+F_{iy}^{S}\delta y_i+F_{iz}^{S}\delta z_i\right)=0 \qquad (10.5.4)$$

Лагранжовиот принцип ги користи поимовите виртуелни поместувања, варијации на координати и во литературата може да се сретне под насловот “Принцип на виртуелни поместувања” или “Варијационен принцип”.