GLAVA 5

D I NAM I KA NA METER I JALNA TO^KA

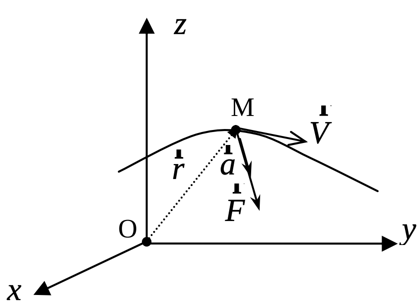
5. ДИНАМИКА НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА

Во динамика на материјална точка се изучува движењето на материјална точка со конечна маса, односно материјална точка које е модел на материјално тело чии димензии се занемарени или тело кое се движи транслаторно, под дејство на сила.

5.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА

Нека материјална точка со маса m се движи во просторот под дејство на сила $\vec{F}$ (Сл.5.1.1). Според вториот закон на Њутн врската помеѓу силата $\vec{F}$ и кинематичката карактеристика на движењето - заврзувањето $\vec{a}$ е определена со равенката :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{5.1.1}$$



Сл. 5.1.1

Силата $\vec{F}$ може да биде и резултанта добиена од систем на сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$, кои дејствуваат на подвижната точка, односно $\vec{F} = \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Ако забрзувањето $\vec{a}$ се замени со релацијата: $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ и се замени во равенката (5.1.1) се добива диференцијална равенка на движење во векторска форма т.е.

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{5.1.2}$$

Со равенката (5.1.2) е определена врската помеѓу силата и законот на движењето $\vec{r} = \vec{r}(t)$ на точката М (изразен преку вториот извод по времето). Векторската равенка (5.1.2) е **основна равенка во динамика на материјална точка**, наречена **Њутнова равенка**. Истата претставува диференцијална равенка од втор ред.

Силите кои дејствуваат врз материјалната точка можат да бидат константни и променливи и да зависат од времето t, положбата $\vec{r}$ и брзината $\vec{V}$.

Во најопшт случај кога силата $\vec{F}$ зависи истовремено од трите наведени параметри t, $\vec{r}$ и $\vec{V}$ се добива следнава диференцијална равенка на движење на материјална точка во векторска форма:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \vec{V}\right) \tag{5.1.3}$$

Ако е движењето во **Декартов координатен систем**, по извршено проектирање на равенката (5.1.3) по трите ортогонални координатни оски се добиваат три скаларни диференцијални равенки:

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= Fx(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\
m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= Fy(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\
m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= Fz(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})
\end{aligned}
\tag{5.1.4}
$$

При движење на точката во рамнина, на пример во рамнината Oxy, трите диференцијални равнеки се сведуваат на две и тоа:

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= Fx(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\
m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= Fy(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})
\end{aligned}
\tag{5.1.5}
$$

Во случај на праволиниско движење по една од координатните оски, на пример Ox, се добива следнава диференцијална равенка

$$
m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = Fx(t, x, \dot{x}) \tag{5.1.6}
$$

Ако точка се движи во **природен координатен систем** векторската равенка (5.1.2) се проектира по соодветните координатни оски и се добива следниот систем од скаларни равенки:

$$
\begin{aligned}
m \cdot a_T &= F_T(t, s, V) \\
m \cdot a_N &= F_N(t, s, V) \\
0 &= F_B(t, s, V)
\end{aligned}
\tag{5.1.7}
$$

односно:

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} &= F_T(t, s, V) \\
m \cdot \frac{V^2}{Rf} &= F_N(t, s, V) \\
0 &= F_B(t, s, V)
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

Равенките (5.1.8) се наречени природни равенки на движење.

Со проекција на векторската равенката (5.1.2) по трите координатни оски на **цилиндричниот, односно поларно-цилиндричниот координатен систем**, се добиваа следниов систем од скаларни равенки на движење:

$$
\begin{aligned}
m \cdot a_r &= Fr(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z}) \\
m \cdot a_n &= Fn(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z}) \\
m \cdot a_z &= Fz(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z})
\end{aligned}
\qquad (5.1.9)
$$

Со замена на компонетите на забрзувањето во равенките (5.1.9) се добиваат следитеве диференцијални равенки:

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dj}{dt}\right)^2 \right] = Fr(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z}) \\
&m \cdot \left[r\frac{d^2 j}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} \right] = Fn(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z}) \\
&m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = Fz(t, r, j\,, z, \dot{r}, \dot{j}, \dot{z})
\end{aligned}
\qquad (5.1.10)
$$

Диференцијалните равенки на движење на материјална точка во **поларен координатен систем** се дадени во следнава форма:

$$
\begin{aligned}
&m \cdot \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dj}{dt}\right)^2 \right] = Fr(t, r, j\,, \dot{r}, \dot{j}) \\
&m \cdot \left[r\frac{d^2 j}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{dj}{dt} \right] = Fn(t, r, j\,, \dot{r}, \dot{j})
\end{aligned}
\qquad (5.1.11)
$$

Во динамиката на точка се решаваат две основни задачи и тоа:

Прва задача: Даден е законот на движењето на материјална точка, а се бара силата која дејствува. Со диференцирање, односно преку вторите изводи на законот на движењето се определува и силата:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}} = m\left(\ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}\right).$$

Втора задача: Дадена е силата $\vec{F}$, а се бара законот на движењето. Решението се добива со двојно интегрирање на диференцијалните равенки од втор ред. За определување на интеграционите константи се користат почетните услови на движење, односно за: $t = t_0$

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k} \\
\vec{V} &= \dot{x}_0 \cdot \vec{i} + \dot{y}_0 \cdot \vec{j} + \dot{z}_0 \cdot \vec{k}
\end{aligned}
$$

5.2 ОПШТА ИНТЕГРАЦИЈА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИТЕ РАВЕНКИ

Се разгледува втората задача во динамика на материјална точка и се определува општата интеграција на диференцијалните равенки ако движењето е зададено во декартов кооординатен систем.

Нека материјална точка со маса m се движи под дејство на сила која е функција од времето t, местоположбата $\vec{r}$ и брзината $\vec{V}$, односно $\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \vec{V}\right)$.

Скаларните Диференцијалните равенки на движење се:

$$
\begin{aligned}
m \cdot \ddot{x} &= Fx\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\
m \cdot \ddot{y} &= Fy\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\
m \cdot \ddot{z} &= Fz\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right)
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

Равенките (5.2.1), во општ случај се систем од три диференцијални равенки од втор ред, со чија интеграција се добива законот на движењето на точката.

Со прва и втора општа интеграција се добиваат, законот на брзината:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}\left(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3\right) \\
\dot{y} &= \dot{y}\left(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3\right) \\
\dot{z} &= \dot{z}\left(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3\right)
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

односно законот на движењето:

$$
\begin{aligned}
x &= x\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\
y &= y\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\
z &= z\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right)
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

каде: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6 се неопределени интеграциони константи кои се определуваат од почетните услови на движење (кинематички услови) односно за почетно време t = to е дадена положбата $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$ и брзината $\vec{V} = \dot{x}_0 \cdot \vec{i} + \dot{y}_0 \cdot \vec{j} + \dot{z}_0 \cdot \vec{k}$. Со замена во равенките (5.2.2) и (5.2.3) се добиваат шест равенки во форма:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}\left(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3\right) &= \dot{x}_0 \\
\dot{y}\left(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3\right) &= \dot{y}_0 \\
\dot{z}\left(t_0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3\right) &= \dot{z}_0 \\
x\left(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) &= x_0 \\
y\left(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) &= y_0 \\
z\left(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) &= z_0
\end{aligned}
\tag{5.2.4}
$$

Од дадените равенки во кои фигурираат почетните параметри $t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, се определуваат непознатите константи C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, односно:

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).........(i = 1,2,3,4,5,6) \qquad (5.2.5)$$

Со замена на интеграционите константи во равенките (5.2.3), законот на движење се добива во форма:

$$\begin{aligned} x &= x(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y &= y(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ z &= z(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

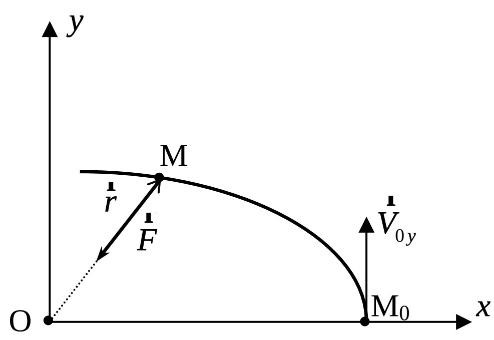
Ако е движењето на точката M **во рамнина**, законот на движењето се добива од следните две равенки:

$$\begin{aligned} x &= x(t, t_0, x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) \\ y &= y(t, t_0, x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) \end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

За праволиниско движење по **насочена координатна оска x**, општиот интеграл со кој е определен законот на праволиниското движење се добива од равенката:

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0) \qquad (5.2.8)$$

Пример 1: Точка се движи под дејство на сила $\vec{F} = -c \cdot \vec{r} = -c(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})$. Да се определи интегралот на диференцијалната равенка ако се дадени почетните услови на движење: $t_0 = 0, x = x_0, \dot{y} = V_{0x}$



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -c(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x$$

$$m \cdot \ddot{y} = -c \cdot y$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$$

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot y = 0$$

се добиваат две хомогени равенки од втор ред

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\cdot x=0$$
$$\ddot{y}+\frac{c}{m}\cdot y=0 \quad , \qquad \frac{c}{m}=k^2$$

интегралите се добиваат во форма:

$$x(t)=C_1\cos kt+C_2\sin kt$$
$$y(t)=C_3\cos kt+C_4\sin kt$$

брзината на точката преку компонентите е:

$$\dot{x}=-C_1\cdot k\cdot\sin kt+C_2\cdot k\cdot\cos kt$$
$$\dot{y}=-C_3\cdot k\cdot\sin kt+C_4\cdot k\cdot\cos kt$$

Интеграционите константи се определуваат од почетните услови:

$$x_0=0 \qquad C_1=x_0$$
$$0=C_3 \qquad C_2=C_3=0$$
$$0=C_2\cdot k$$
$$V_0=C_4\cdot k \qquad C_4=\frac{V_0}{k}$$

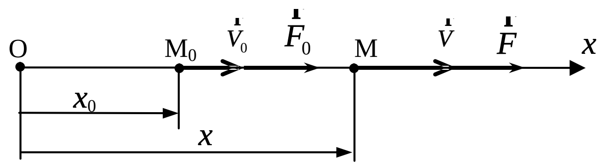
Дефинитивно законот на движење на точката M е во форма:

$$x=x_0\cos kt$$
$$y=\frac{V_0}{k}\sin kt$$

5.3 ДИНАМИКА НА ПРАВОЛИНИСКО ДВИЖЕЊЕ

Динамички услов за да една материјална точка се движи праволиниски по насочена оска е правецот на силата $\vec{F}$ која дејствува во почетокот M_0 да се совпадне со правецот на почетната брзина $\vec{V}_0$.

Нека е даден општ случај кога материјална точка се движи праволиниски по координатната оска Ox под дејство на сила $Fx = Fx(t, x, \dot{x})$. Движењето го започнува во време $t = t_0$, од положба $x = x_0$ со почетна брзина $\dot{x} = \dot{x}_0$ (Сл.5.3.1).



Сл. 5.3.1

Решението на зададената задача се сведува на решението на втората задача во динамиката. Динамичката равенка на насоченото праволиниско движење по координатна оска Ox се добива во форма:

$$m\ddot{x} = Fx(t, x, \dot{x}) \tag{5.3.1}$$

Со првата интеграција се ослободува вториот извод, а се добива непозната интеграциона константа C_1. Равенката се добива во форма:

$$\dot{x} = \dot{x}(t, x, C_1) \tag{5.3.2}$$

По извршената втора интеграција се добива следната равенка:

$$x = x(t, C_1, C_2) \tag{5.3.3}$$

Со користење на дефинираните почетни услови на движење се добиваат две равенки од кои се определуваат непознатите интеграциони константи:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0, x_0, C_1) &= \dot{x}_0 \\ x(t_0, C_1, C_2) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

По определувањето на C_1 и C_2, каде $C_1 = C_1(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ и $C_2 = C_2(t_0, x_0, \dot{x}_0)$, и со замена во равенката (5.3.3) се добива **законот на праволинискотo движење**:

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0) \tag{5.3.5}$$

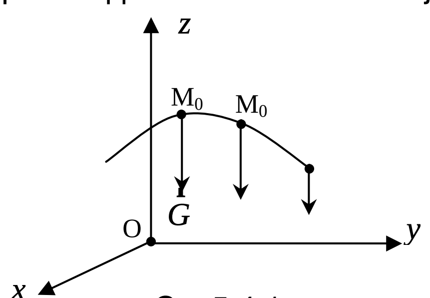
Од изнесеното може да се констатира дека законот на праволинискотo движење зависи и од почетните услови на движење.

Во наредните примери се разгледуваат општите интеграли на посебни праволиниски движења кои се среќаваат во природата, и тоа:

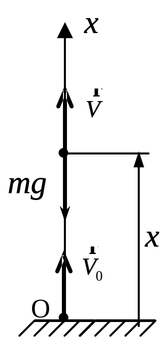
- Праволиниско движење под дејство на константна сила;
- Праволиниско движење под дејство на сила која зависи од времето;
- Праволиниско движење под дејство на сила која зависи од положбата ;
- Праволиниско движење под дејство на сила која зависи од брзината.

5.4 ПРАВОЛИНИСКО ДВИЖЕЊЕ ПОД ДЕЈСТВО НА КОНСТАНТНА СИЛА

Наједноставната константна сила која дејствува на материјална точка е нејзината тежина која произлегува од гравитацијата и се определува од производот на масата и земјиното забрзување, т.е. $F_G = G = m \cdot g$ (Сл.5.4.1).



Сл. 5.4.1



Сл. 5.4.2

За карактеристично праволиниско движење кое се врши под дејство на тежината, во замислен безвоздушен простор на површината на земјата се истрели во вертикален правец, нагоре и надолу, како и слободното паѓање.

Вертикалниот истрел нагоре се врши со насочена почетна брзина вертикално нагоре од површината на земјата. (Сл.5.4.2).

На материјална точка дејствува тежината G која е спротивно насочена на брзината V.

Зададени се следниве почетни кинематички услови:

$t = t_0 = 0$, $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Диференцијалните равенки на движење се добива во форма:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= -m \cdot g \\ \ddot{x} &= -g \end{aligned} \qquad (5.4.1)$$

Со првата интеграција се добива:

$$\dot{x} = -g \cdot t + C_1 \qquad (5.4.2)$$

со втората интеграција

$$x = -\frac{g \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 \qquad (5.4.3)$$

Со замена на почетните кинематичии услови во равенките 5.4.2 и 5.4.3 се добиваат константите:

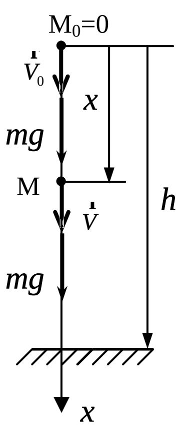
$$C_1 = V_0 \qquad C_2 = 0 \tag{5.4.4}$$

Законот на вертикалниот истрел нагоре се добива со равенката:

$$x = V_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{5.4.5}$$

Вертикалниот истрел нагоре е рамномерно забавено праволиниско движење, кое во даден момент достигнува висина $h = \frac{V_0^{\ 2}}{2g}$**, а потоа повторно под дејство на тежината слободно паѓа на површинат а на земјата**.

Нека од висина h, точка со маса m го започнува движењето со почетна брзина V_0 насочена кон површината на земјата (**вертикален истрел надолу**) се усвојува почетна состојба (Сл.5.4.31) $M_0 = 0, t = t_0, x_0 = 0$ и $V_0 = \dot{x}_0$.



Сл. 5.4.3

Диференцијалната равенка за вертикалнен истрел надолу е:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= m \cdot g \\ \ddot{x} &= g \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Со прва и втора интеграција се добива:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g \cdot t + C_1 \\ x &= \frac{g \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Интеграционите константи се определуваат од почетните услови за: $t = 0$, $x_0 = 0$, $V_0 = \dot{x}_0$ и изнесуваат:

$$\begin{aligned} C_1 &= \dot{x}_0 = V_0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Законот на вертикалниот истрел надолу се добива во форма:

$$x = V_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{5.4.9}$$

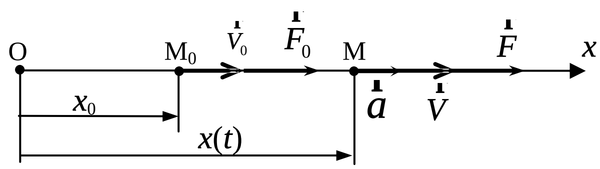
Вертикалниот истрел надолу е равномерно забрзано праволиниско движење.
Посебен случај, кога е $V_0 = 0$. се добива **законот на слободното паѓање** на материјална точка.

$$x = \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{5.4.10}$$

Законот на слободното паѓање е определен од италјанскиот научник Галилеј. Со занемарување на отпорот во воздухот, слободното паѓање претставува едно рамномерно забрзано праволиниско движење.

5.5 ПРАВОЛИНИСКО ДВИЖЕЊЕ ПОД ДЕЈСТВО НА СИЛА КОЈА ЗАВИСИ ОД ВРЕМЕ

Материјална точка со маса m се движи праволиниски под дејство на сила која зависи од времето $F = F(t)$. Нека за време $t = t_0$, положбата на точката е во положба $x = x_0$ и има почетна брзина $V = V_0 = \dot{x}_0$ (Сл.5.5.1).



Сл.5.5.1

Диференцијалната равенка на движење се определува според вториот Њутнов закон:

$$\begin{gathered} m \cdot \ddot{x} = F(t) \\ \ddot{x} = \frac{1}{m} F(t), \text{ или } \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(t) \end{gathered} \tag{5.5.1}$$

Се раздвојуваат променливите и се итегрира:

$$\begin{gathered} d\dot{x} = \frac{1}{m} F(t) dt \\ V = \dot{x} = \frac{1}{m} \int F(t) dt + C_1 \end{gathered} \tag{5.5.2}$$

за $t = t_0$, $V = V_0 = \dot{x}_0$ се добива:

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{m} \int_{t=t_0} F(t) dt + C_1 \text{, или}$$

$$C_1 = \dot{x}_0 - \frac{1}{m}\int\limits_{t=t_0} F(t)dt \qquad (5.5.3)$$

Со замена на C_1 во интегралот се определува **законот на брзината**:

$$V = \dot{x} = \frac{1}{m}\int F(t)dt + \dot{x}_0 - \frac{1}{m}\int\limits_{t=t_0} F(t)dt$$

или:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{t} F(t)dt \qquad (5.5.4)$$

Се повторува интегрирањето и се добива законот на движењето во форма:

$$x = \dot{x}_0 \cdot t + \frac{1}{m}\int\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(t)dt\right]dt + C_2 \qquad (5.5.5)$$

Со почетниот услов $t = t_0$, $x = x_0$ се определува C_2, односно:

$$x_0 = \dot{x}_0 \cdot t + \frac{1}{m}\int\limits_{t=t_0}\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(t)dt\right]dt + C_2$$

или:

$$C_2 = x_0 - \dot{x}_0 \cdot t - \frac{1}{m}\int\limits_{t=t_0}\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(t)dt\right]dt \qquad (5.5.6)$$

Законот на праволиниското движење се добива во дефинитивна форма

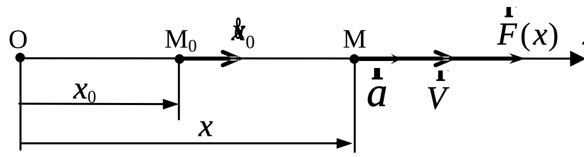
$$x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(t)dt\right]dt \qquad (5.5.7)$$

Положбата на точката која е определена со координата x, е фунција од времето, а истовремено зависи и од почетните услови на движење, т.е:

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$$

5.6 ПРАВОЛИНИСКО ДВИЖЕЊЕ ПОД ДЕЈСТВО НА СИЛА КОЈА ЗАВИСИ ОД ПОЛОЖБАТА

Материјална точка со маса m се движи праволиниски под дејство на сила која зависи од положбата, односно $F = F(x)$. Движењето го започнува во време $t = t_0$, од почетна положба x_0 со почетна брзина $V_0 = \dot{x}_0$.



Диференцијалната равенка на движење се добива во форма:

$$m \cdot \ddot{x} = F(x) \tag{5.6.1}$$

или:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(x) \;\; / \;\; dx$$

$$\frac{dx}{dt} d\dot{x} = \frac{1}{m} F(x) \cdot dx$$

$$\dot{x} \cdot d\dot{x} = \frac{1}{m} F(x) dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m} \int F(x) dx + C_1$$

Од дадени почетни услови: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ се определува интеграционата константа C_2:

$$\frac{\dot{x}_0^{\,2}}{2} = \frac{1}{m} \int\limits_{(x=x_0)} F(x) dx + C_1$$

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0^{\,2}}{2} - \frac{1}{m} \int\limits_{(x=x_0)} F(x) dx \tag{5.6.2}$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\dot{x}_0^{\,2}}{2} + \frac{1}{m} \int\limits_{x=x_0}^{x} F(x) dx$$

Законот на брзината на точка зависи од нејзината положба и се добива во форма:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\dot{x}_0^{\,2} + \frac{2}{m} \int\limits_{x=x_0}^{x} F(x) dx} \tag{5.6.3}$$

Ако е: $\dot{x}_0^{\,2} + \frac{2}{m}\int\limits_{x=x_0}^{x} F(x)dx = \Phi(x)$ се добива следната диференцијална равенка:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(x)}$$

или:

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}} = dt$$

по извршена интеграција се добива равенката:

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}} = t + C_2 \tag{5.6.4}$$

за дадени почетни услови $t = t_0$, $x = x_0$ интеграционата константа изнесува:

$$C_2 = \int\limits_{x=x_0} \frac{dx}{\pm\sqrt{\Phi(x)}} - t_0$$

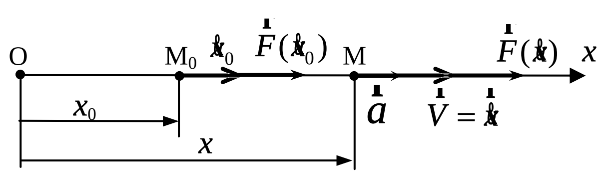
Со замена на C_2 во равенката (5.6.4) и со инверзија се определува **законот на движење** во форма:

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$$

Положбата на точката зависи од времето и почетните услови на движење.

5.7 ПРАВОЛИНИСКО ДВИЖЕЊЕ ПОД ДЕЈСТВО НА СИЛА КОЈА ЗАВИСИ ОД БРЗИНА

Материјална точка со маса m се движи праволиниски под дејство на сила која зависи од брзината $F = F(V)$. Нека за време $t = t_0$, е во положба $x = x_0$ и има почетна брзина $V_0 = \dot{x}_0$.



Сл. 5.7.1

Диференцијалната равенка на движење гласи:

$$m \cdot \ddot{x} = F(\dot{x}) \tag{5.7.1}$$

$$m \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = F(\dot{x})$$

Со раздвојуваат променливите и се интегрира.

$$\int \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m}\int dt + C_1$$

$$\int \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m} t + C_1$$

за $t = t_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$

$$\int\limits_{\dot{x}=\dot{x}_0} \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m} t_0 + C_1 \text{, или:}$$

$$C_1 = \int\limits_{\dot{x}=\dot{x}_0} \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} - \frac{1}{m} t_0 \qquad (5.7.2)$$

$$\int\limits_{\dot{x}=\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m}(t - t_0) \qquad (5.7.3)$$

Со инверзија се определува брзината $V = \dot{x}$:

$$V = \dot{x} = \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0) \qquad (5.7.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0) \qquad (5.7.5)$$

$$x = \int \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0)dt + C_2$$

за $t = t_0$, $x = x_0$

$$x_0 = \int\limits_{t=t_0} \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0)dt + C_2 \text{, или:}$$

$$C_2 = x_0 - \int\limits_{t=t_0} \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0)dt \qquad (5.7.6)$$

$$x = x_0 + \int\limits_{t=t_0}^{t} \varphi\,(t, t_0, \dot{x}_0)dt \qquad (5.7.7)$$

Законот на движењето зависи од времето и од почетните услови на движење, т.е:

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$$

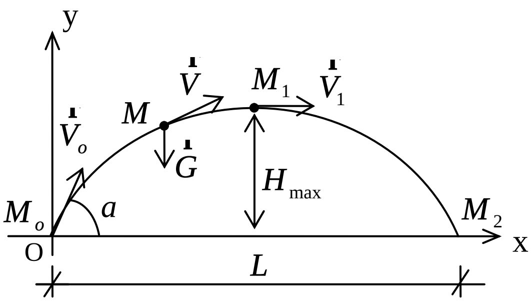
5.8 KOS ISTREL

Kosiot istrel e karakteristi~no krivolinisko dvi`ewe koe se sretnuva vo praksata. Vertikalniot istrel nagore i horizontalniot istrel proizleguvaat od kosiot istrel kako posebni slu~ai.

Ako materijalna to~ka so masa m se isfrli vo bezvozdu{en prostor so po~etna brzina $\vec{V}_0$ koja zaklopuva agol α so horizontalata (Sl.5.8.1), velime deka nastanuva **kos istrel**. Agolot α se narekuva elevacionen agol.

Za da gi dobieme parametarskite ravenki so koi }e bide definirano dvi`eweto na materijalnata to~ka M }e go postavime koordinatniot sistem taka {to koordinatniot po~etok O }e se poklopi so po~etnata polo`ba na podvi`nata to~ka $M_0$, a ramninata xOy }e ja poklopime so vertikalnata ramnina vo koja le`i vektorot na po~etnata brzina $\vec{V}_0$.

Za taka definiran koordinaten sistem mo`eme da gi usvoime slednite po~etni uslovi:



Sl. 5.8.1

za: $t_0 = 0$

$$x_o = 0\,,\quad y_o = 0\,,\quad \dot{x}_o = V_0 \cos\alpha\,,\quad \dot{y}_o = V_o \sin\alpha \tag{5.8.1}$$

Edinstvena sila {to dejstvuva na materijalnata to~ka e silata na zemjinata te`a, paralelna so Oy oskata, pa diferencijalnite ravenki na dvi`eweto go dobivaat sledniot oblik:

$$\begin{matrix} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{matrix} \tag{5.8.2}$$

So dve posledovatelni integracii gi dobivame slednite izrazi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \\ \dot{y} &= -gt + C_2 \\ x &= C_1 t + C_3 \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4 \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

Integracionite konstanti se dobivaat od po~etnite uslovi definirani so ravenkata (5.8.1) ako istite gi zamenime vo ravenkite (5.8.3), odnosno:

$$\begin{aligned} C_1 &= V_o \cos a \\ C_2 &= V_o \sin a \\ C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \tag{5.8.4}$$

Kone~nite ravenki na dvi`eweto go dobivaat sledniot oblik:

$$\begin{aligned} x &= V_0\, t \cos a \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + V_o\, t \sin a \end{aligned} \tag{5.8.5}$$

Prvata ravenka ni poka`uva deka vo pravec na oskata $x$ to~kata se dvi`i ramnomerno (proekcijata na brzinata na oskata x ima konstantna vrednost).

Vtorata ravenka ni poka`uva deka vo po~etokot, se do moment $t_1$ (definirana polo`ba na to~ka M_1), materijalnata to~ka vo pravec na oskata y se dvi`i ednakvo zabaveno, a potoa se dvi`i ednakvo zabrzano.

Ako od ravenka (5.8.6) se eliminira vremeto t, se dobiva **ravenkata na traektorija** na kosiot istrel:

$$t = \frac{x}{V_o \cos a}$$

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{V_o^2 \cos^2 a} + V_o \sin a \,\frac{x}{V_o \cos a}$$

$$y = -\frac{gx^2}{2V_o^2 \cos^2 a} + x\,tga \tag{5.8.6}$$

Traektorijata na kosiot istrel pretstavuva ravenka na kvadratna parabola, so oska na simetrija paralelna so oskata y.

To~kata M_1 vo koja nastanuva promena na dvi`eweto pretstavuva **teme na parabolata**. Vo taa to~ka vektorot na brzinata e horizontalen, pa od uslov deka proekcijata na brzinata $\vec{V}$ na oskata $y$ e nula se dobiva vremeto na dvi`ewe, a potoa i koordinatite na to~kata M_1:

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = -gt + V_o \sin a = 0$$

$$t_1 = \frac{V_o \sin a}{g} \tag{5.8.7}$$

$$x_1 = V_o \cos a \, \frac{V_o \sin a}{g} = \frac{2 \sin a \cos a \, V_o^2}{2g} = \frac{V_o^2 \sin 2a}{2g}$$

$$y_1 = H_{\max} = \frac{V_o^2 \sin^2 a}{2g}$$

Maksimalniot dostrel na kosiot istrel se ozna~uva so L i se dobiva od uslov deka vo to~kata M_2 imame $y_2 = 0$.

$$y_2 = -\frac{gt^2}{2} + V_o t \sin a = 0$$

$$t_2 = \frac{2V_o \sin a}{g} \tag{5.8.8}$$

$$x_2 = L = V_o \cos a \, \frac{2V_o \sin a}{g} = \frac{V_o^2 \sin 2a}{g}$$

Ako se sporedi ravenkata (5.8.8) so ravenkata 5.8.7 mo`e da se zaklu~i deka vremeto t_2, potrebno to~kata da go dostigne maksimalniot dostrel, e dvojno pogolemo od vremeto t_1 koe odgovara na maksimalnata visina na iska~uvawe, a x koordinatata {to odgovara na to~kata M_2 e dvojno pogolema od x koordinatata {to odgovara na to~kata M_1.

Najgolema visina na iska~uvawe se postignuva za agol $a = p/2$, odnosno so vertikalen istrel nagore:

$$H_{\max} = \frac{V_o^2}{2g} \tag{5.8.9}$$

Najgolem dostrel se postignuva za agol $a = p/4$:

$$L_{\max} = \frac{V_o^2}{g} \tag{5.8.10}$$

Horizontalniot istrel se postignuva za agol $a = 0$ i nekoja visina h.

GLAVA 6

OSNOVNI ZAKONI VO DINAMIKA NA METERIJALNA TO^KA

6.1 ДИНАМИЧКИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА

Нека е дадена материјална точка со маса m која се движи во просторот под дејство на сила $\vec{F}$.

Во секој момент можат да се дефинираат динамичките карактеристики кои произлегуваат од кинематичките карактеристики на движењето (векторот на положбата $\vec{r}$ и брзината на точката $\vec{V}$) и од материјалноста на точката изразена преку масата m.

Како основни динамички карактеристики, се дефинираат: **количеството на движење** $\vec{K}$ и **кинетичката енергија** $Ek = T$, на подвижната точка. Дополнителна динамичка карактеристика која произлегува од количеството на движење и положбата на точката е **кинетичкиот момент** $\vec{l}_0$ (Сл.6.1.1).

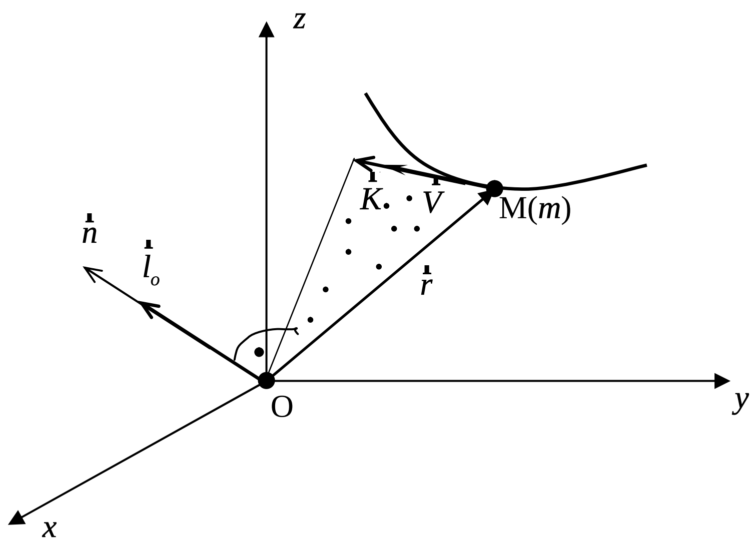
Количество на движење на подвижна точка е наречена векторската големина која е определена со производот на масата m и брзината на точката $\vec{V}$, односно:

$$\vec{K} = m \cdot \vec{V} \tag{6.1.1}$$

Количеството на движење е вектор колинеарен со векторот на брзината. За определување на интензитетот на количеството на движење треба да се дефинира соодветна мерна единица. Мерната единица ќе произлезе од димензиите на количество на движење $\vec{K}$ кои произлегуваат од димензиите на основните големини (маса, должина и време), и се добиваат од производот $M \cdot L \cdot T^{-1}$. Според тоа мерната единица изнесува $1 \cdot kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

Кинетички момент на точката е векторска големина определена со векторскиот производ на векторот на положбата $\vec{r}$ и количеството на движењето $\vec{K}$, т.е:

$$\vec{l}_0 = [\vec{r}, \vec{K}] = [\vec{r}, m \cdot \vec{V}] \tag{6.1.2}$$



Сл.6.1.1

Од равенката (6.1.2), може да се констатира дека кинетичкиот момент е момент на количеството на движење во однос на координатниот почеток “0“. Правецот и насоката се поклопуваат со правецот и насоката на позитивно ориентирана нормала на точката О на површината која ја оформуваат векторите $\vec{r}$ и $\vec{K}$.
Димензиите на $\vec{l}_0$ се добиваат од производот: $M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$, а мерната единица изнесува $1 \cdot kg \cdot m^2 \cdot \sec^{-1}$.

Количеството на движење $\vec{K}$ и кинетичкиот момент $\vec{l}_0$ се векторски динамички карактеристики на подвижната точка од кои количеството $\vec{K}$ е вектор врзан за самата точка, додека кинетичкиот момент $\vec{l}_0$ вектор врзан за полот “О“. Овие динамички карактеристики се воведени во класичната механика од страна на нејзиниот основоположник Исак Њутн.

Кинетичката енергија е наречена жива сила на подвижната точка и е оформена како скаларна карактеристика , дефинирана со полупроизводот на масата и квадратот на брзината, односно :

$$Ek = T = \frac{m \cdot V^2}{2} \tag{6.1.3}$$

Димензиите на кинетичката енергија се: $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$, а мерна единица $1 \cdot kg \cdot m^2 \cdot \sec^{-2}$

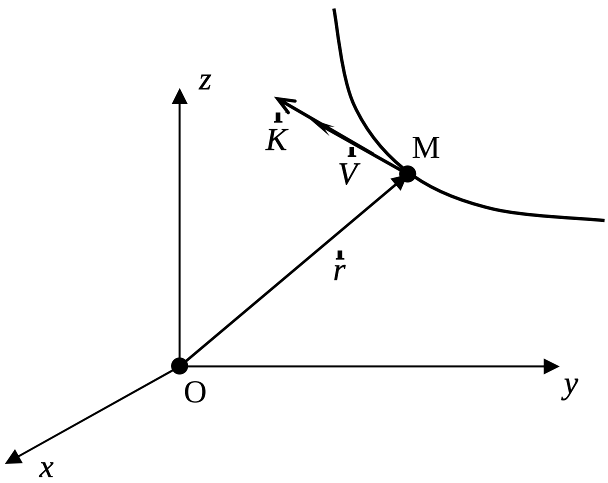
Оваа динамичка карактеристика на подвижната точка е создадена од научникот Лајбниц.

Промените на овие динамички карактеристики настануваат од карактеристични дејства на силата $\vec{F}$ врз подвижната точка.

Со поврзувањето на промените на динамичките карактеристики и каркатеристиките на силата $\vec{F}$ е овозможено оформување на основните закони во динамика на материјална точка.

6.2 ЗАКОН ЗА КОЛИЧЕСТВО НА ДВИЖЕЊЕ И ЗАКОН ЗА ПРОМЕНА НА КОЛИЧЕСТВО НА ДВИЖЕЊЕ

Поимот количеството на движење на материјална точка е основна динамичка карактеристика дефинирана од производот на масата m и брзината на точката $\vec{V}$, односно: $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$ (Сл.6.2.1).



Сл.6.2.1

Количеството на движење е векторска функција, чии проекции во Декартовиот координатен систем Oxyz се:

$$
\begin{aligned}
Kx &= m \cdot Vx = m \cdot \dot{x} \\
Ky &= m \cdot Vy = m \cdot \dot{y} \qquad (6.2.1) \\
Kz &= m \cdot Vz = m \cdot \dot{z}
\end{aligned}
$$

Со трите проекции (6.2.1) се дефинира и векторот $\vec{K}$ со интензитет, правец и насока.

$$K = \sqrt{Kx^2 + Ky^2 + Kz^2}$$

$$\cos\alpha_{\vec{K}} = \frac{Kx}{K}; \ \cos\beta_{\vec{K}} = \frac{Ky}{K}; \ \cos\gamma_{\vec{K}} = \frac{Kz}{K} \qquad (6.2.2)$$

Нека векторската равенка $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$, се диференцира по времето:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F} \qquad (6.2.3)$$

Од равенката (6.2.3) произлегува равенката:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \qquad (6.24)$$

Равенката (6.2.4) го определува законот за количество на движење на материјална точка, а со тоа е определен и вториот Њутнов закон преку количеството на движење кој гласи:

Изводот на количеството на движење по времето е еднаков на силата која дејствува на материјалната точка.

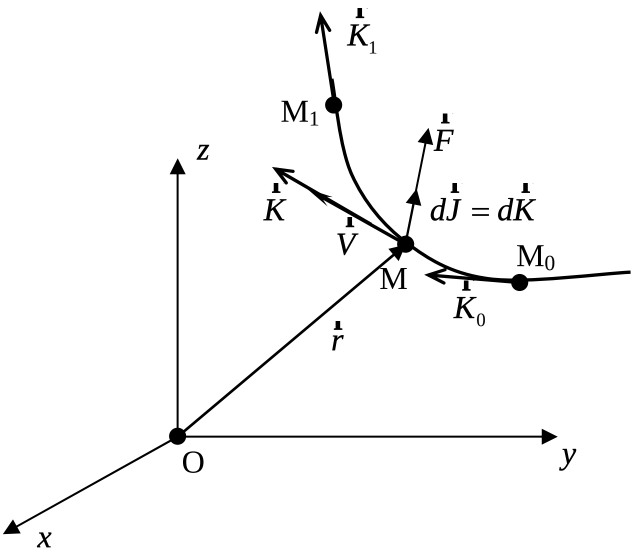
Ако законот за количество на движење (6.2.4), се напише во следнава форма (диференцијална) се добива равенката:

$$d\vec{K} = \vec{F} \cdot dt \qquad (6.2.5)$$

Производот на силата $\vec{F}$ и елементарниот прираст на времето дефинираат карактеристика на силата наречена елементарен импулс $d\vec{J}$, чии правец и насока се совпаѓаат со правецот и насоката на силата (Сл.6.2.2).

Равенката (6.2.5) може да се напише во форма:

$$d\vec{K} = d\vec{J} \tag{6.2.6}$$



Сл.6.2.2

Елементарниот прираст на количеството на движење е еднаков на елементарниот импулс на силата.

Со диференцијалната равенка (6.2.6) се определува законот за прираст (промена) на количеството на движење во диференцијална форма.

Ако движењето на точката е во временски интервал од t_0 до t_1, импулсот на силата се добива во форма:

$$\vec{J} = \int_{t_o}^{t_1} d\vec{J} = \int_{t_o}^{t_1} \vec{F} \cdot dt \tag{6.2.7}$$

или со проекциите Jx, Jy и Jz:

$$Jx = \int_{t_o}^{t_1} Fx \cdot dt$$

$$Jy = \int_{t_o}^{t_1} Fy \cdot dt \tag{6.2.8}$$

$$Jz = \int_{t_o}^{t_1} Fz \cdot dt$$

Интензитетот, правецот и насоката на импулсот на силата се определуваат од равенките:

$$J = \sqrt{J_X^2 + J_Y^2 + J_Z^2}\ ;\ \cos\alpha_J = \frac{J_X}{J},\ \cos\beta_J = \frac{J_Y}{J},\ \cos\gamma_J = \frac{J_Z}{J} \tag{6.2.9}$$

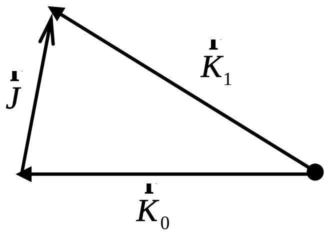
За мерна единица на импулсот на сила е усвоен: $1N \cdot s$ или $1kg \cdot m \cdot s^{-1}$

Равенката (6.2.6) во интегрална форма е:

$$\int_{\vec{K}_0}^{\vec{K}_1} d\vec{K} = \vec{J}\ \text{, односно: }\ \vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{J} \tag{6.2.10}$$

Со равенката (6.2.10) се дефинира **Законот за прираст (промена) на количеството на движење на материјална точка во интегрална форма, кога движењето на точката е во конечен временски интервал од $t_0 - t_1$.**

Истиот гласи: Прирастот на количеството на движење ($\Delta\vec{K} = \vec{K}_1 - \vec{K}_0$) е еднаков на импулсот на силата создаден со дејството на силата во временскиот интервал од $t_0 - t_1$.



Сл.6.2.3

Од Сл.6.2.2 следува графичкиот приказ на импулсот на силата (Сл.6.2.3).

Со проектирање на векторската равенка (6.2.10) се добиваат следните аналитички (скаларни) равенки:

$$K_{1x} - K_{0x} = J_x$$
$$K_{1y} - K_{0y} = J_y$$
$$K_{1z} - K_{0z} = J_z$$

или:

$$m \cdot V_{1x} - m \cdot V_{0x} = \int_{t_o}^{t_1} Fx \cdot dt$$
$$m \cdot V_{1y} - m \cdot V_{0y} = \int_{t_o}^{t_1} Fy \cdot dt \qquad (6.2.11)$$
$$m \cdot V_{1z} - m \cdot V_{0z} = \int_{t_o}^{t_1} Fz \cdot dt$$

Со равенките (6.2.11) се дефинира законот за прираст на количество на движење во однос на координатните оски кој гласи:

Прирастот на проекцијата на количеството на движење по однос на било која оска е еднаков на проекцијата на импулсот на силата во однос на истата оска.

Во случај кога е силата $\vec{F} = 0$, следува дека и импулсот на силата $\vec{J} = 0$, а законот за прираст на количеството на движење се добива во форма:

$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = 0$, односно:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_0 = \vec{K} = m \cdot \vec{V} = const. \qquad (6.2.12)$$

Со равенката (6.2.12) се дефинира **законот за одржување на количеството на движење, односно првиот Њутнов закон, со кој се определува законот на инерцијалното, односно рамномерно праволиниско движење на материјална точка.**

Законот за прираст на количеството на движење може да се примени во случај кога е даден импулсот на силата $\vec{J}$ и почетната брзина $\vec{V}_0$, а се бара брзината на точката по изминатиот временски интервал ($t_0 - t_1$), односно:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \frac{1}{m}\vec{J} \qquad (6.2.13)$$

На оваа векторска равенка одговараат три скаларни равенки од кои ќе се определи и векторот на брзината $\vec{V}_1$.

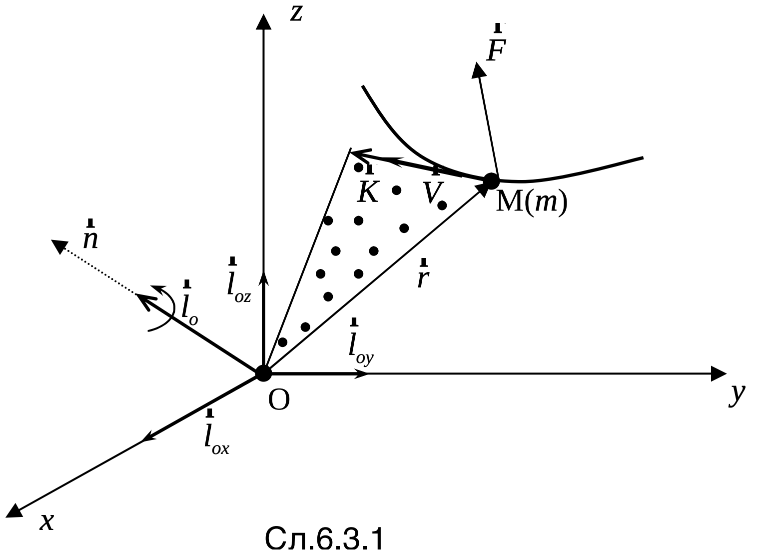
Законот за прираст на количеството на движење се користи во теоријата на удар. Ударот е појава во природата кога во многу краток интервал на време, брзината на точката (материјалното тело) добива значајни промени.

6.3 ЗАКОН ЗА КИНЕТИЧКИ МОМЕНТ

Со законот за кинетички момент се дефинира промената на кинетичкиот момент во зависност од карактеристичното дејството на силата.

Кинетичкиот момент $\vec{l}_0$ е определен со моментот на количеството на движење во однос на координатниот почеток, полот O. Точка со маса m која се движи во просторот под дејство на сила $\vec{F}$, во даден момент содржи количество на движење $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$ и момент на количеството на движење во однос на полот "O" (Сл.6.3.1), односно:

$$\vec{l}_0 = \left[\vec{r}, \vec{K}\right] = \left[\vec{r}, m \cdot \vec{V}\right] \tag{6.3.1}$$



Сл.6.3.1

Векторот $\vec{l}_0$ има правец и насока на позитивно ориентираната нормала во точка O на површината оформена од векторот на положбата $\vec{r}$ и векторот на количеството на дивжење $\vec{K}$, односно брзината $\vec{V}$.

Проекциите на кинетичкиот момент $\vec{l}_0$ во однос на Декартовиот координатен систем се определуваат преку детерминантата:

$$\vec{l}_0 = \left[\vec{r}, m \cdot \vec{V}\right] = \left[\vec{r}, m \cdot \dot{\vec{r}}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

односно:

$$\begin{aligned} \vec{l}_{0x} &= m(y \cdot \dot{z} - z \cdot \dot{y}) \\ \vec{l}_{0y} &= m(z \cdot \dot{x} - x \cdot \dot{z}) \\ \vec{l}_{0z} &= m(x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Интензитетот, правецот и насоката:

$$l_0 = \sqrt{l_{0x}^{\ 2} + l_{0y}^{\ 2} + l_{0z}^{\ 2}}\ ,\ \cos\alpha_{l_0} = \frac{l_{ox}}{l_0}\ ;\ \cos\beta_{l_0} = \frac{l_{oy}}{l_0}\ ;\ \cos\gamma_{l_0} = \frac{l_{oz}}{l_0} \tag{6.3.3}$$

Нека равенката (6.3.1) се диференцира по времето t:

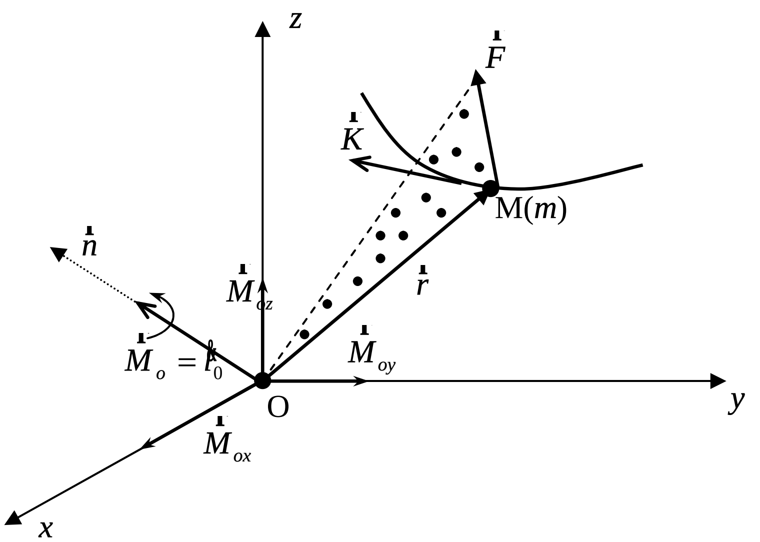
$$\frac{d\vec{l}_0}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\vec{r}, m\cdot\vec{V}\right]=\cancelto{0}{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\cdot\vec{V}\right]}+\left[\vec{r}, m\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}\right] \qquad (6.3.4)$$

Првиот член од равенството (6.3.4) е еднаков на нула, бидејќи векторскиот производ од два колинеарни вектори е еднаков на нула, и равенката (6.3.4) може да се напише во форма:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt}=\left[\vec{r}, m\cdot\vec{a}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=\vec{M}_0^{\vec{F}} \qquad (6.3.5)$$

Векторскиот производ $\left[\vec{r},\vec{F}\right]$ определува момент на силата во однос на координатниот почеток О. Моментот на силата е вектор чии правец и насока се совпаѓаат со правецот и насоката на позитивно ориентираната нормала во полот "О" на површината, оформена од векторот на положбата $\vec{r}$ и силата $\vec{F}$ (Сл. 6.3.2).

Со равенството (6.3.5), односно: $\boxed{\frac{d\vec{l}_0}{dt}=\vec{M}_0^{\vec{F}}}$ **се определува Законот на кинетичкиот момент кој гласи:**



Сл.6.3.2

Изводот на кинетичкиот момент (моментот на количество во однос на полот 0) по времето, е еднаков на моментот на силата во однос на истиот пол.

Равенката (6.3.5) го дефинира законот за кинетичкиот момент во векторска форма. Проекциите на векторската равенка (6.3.5) го определуваат законот за кинетичкиот момент во аналитичка форма, односно:

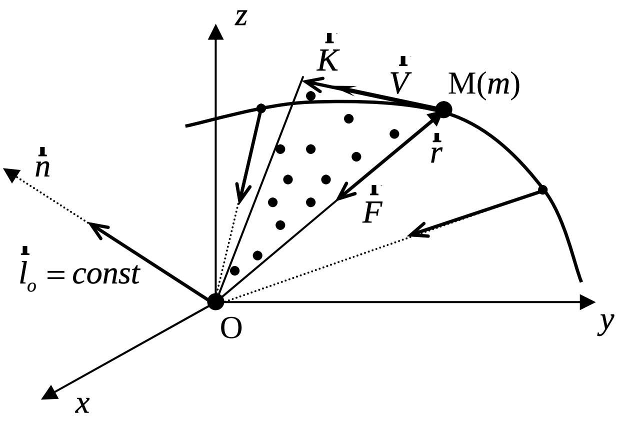
$$\frac{dl_{0x}}{dt}=M_{ox}$$
$$\frac{dl_{0y}}{dt}=M_{oy} \qquad (6.3.6)$$
$$\frac{dl_{0z}}{dt}=M_{oz}$$

Со изразите (6.3.6) се дефинира законот за кинетичкиот момент во однос на оска кој гласи: Изводот на моментот на количеството на

движење во однос на оска по времето е еднаков на моментот на силата во однос на истата оска.

Моментот на силата е карактеристика на силата $\vec{F}$ чие дејство е поврзано со положбата на точката во однос на полот "O".

Komponentite na momentot na silata proizleguvaat od determinantata na vektorskata ravenka (6.3.5).



Сл.6.3.3

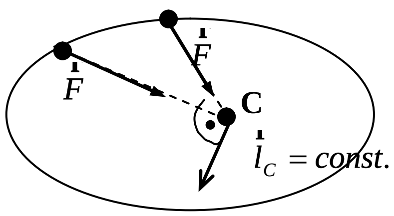
Нека е моментот на силата во однос на полот O еднаков на нула , т.е. $\vec{M}_0 = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$. Следува дека нападната линија на силата $\vec{F}$ постојано минува низ полот O (Сл.6.3.3).

За: $\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\vec{F}} = 0$, кинетичкиот момент

$$\vec{l}_0 = const. \qquad (6.3.7)$$

Со векторската равенка (6.3.7) се дефинира законот за одржување на кинетичкиот момент во однос на полот O. Движењето на точката е во постојана рамнина.

Законот за одржување на кинетичкиот момент важи при движењето на планетите на сончевиот систем, чие движење е под дејство на привлечни сили кои се секогаш насочени кон сонцето:

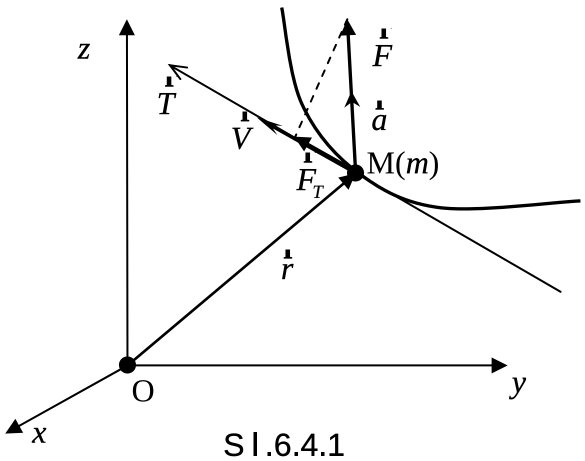


6.4 ZAKON ZA PRIRAST NA KINETI^KATA ENERGIJA

Neka e dadena materijalna to~ka M so masa m koja se dvi`i vo prostorot pod dejstvo na sila $\vec{F}$ (Sl.6.4.1). So poluproizvodot na masata i kvadratot na brzinata se definira dinami~kata karakteristika na dvi`eweto kineti~ka energija ili `iva sila na podvi`nata to~ka t.e.:

$$Ek = T = \frac{m \cdot V^2}{2}$$

Spored iznesenoto sleduva deka promenata na kvadratot na intenzitetot na brzinata pridonesuva za promena na kinetikata Ek.



Sl.6.4.1

Za da se opredeli karakteristikata na silata koja }e izvr{i promena na kineti~kata energija, se koristi dinami~kata ravenka na dvi`ewe po pravec na tangentata t.e. $m \cdot a_T = F_T$.

Neka ravenkata se pomno`i so elementarniot pat ds odnosno:

$$m \cdot a_T = F_T \quad / \quad \cdot ds$$

$$m \cdot \frac{dV}{dt} ds = F_T \cdot ds$$

$$m \cdot V \cdot dV = F \cos a \cdot ds$$

$$\frac{1}{2} d\left(m \cdot \frac{V^2}{2} \right) = \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) \tag{6.4.1}$$

Izrazot od leva strana go opredeluva diferencijalot na kineti~kata energija, odnosno $dEk = dT$, a izrazot od desnata strane e skalaren proizvod na silata $\vec{F}$ i elementarnoto pomestuvawe $d\vec{r}$ na podvi`nata to~ka.

Karakteristikata na silata koja e opredelena so skalarniot proizvod na silata $\vec{F}$ i elementarnoto pomestuvawe na podvi`nata to~ka $d\vec{r}$ e nare~ena elementarna rabota i se ozna~uva so dA.

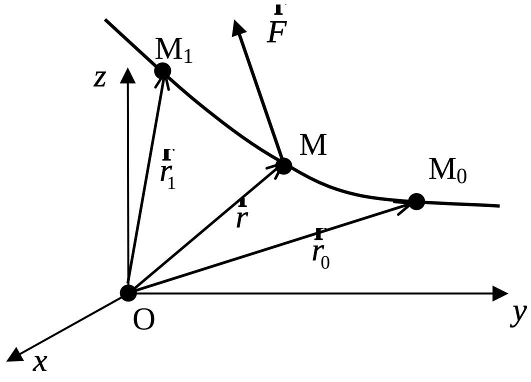
$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r} \right) \tag{6.4.2}$$

Ravenkata (6.4.1) mo`e da se napi{e vo forma:

$$dT = dA \tag{6.4.3}$$

Ravenkata (6.4.3) go definira **Zakonot za promena na kineti~kata energija vo diferencijalna forma koj glasi: Elementarnata promena na kineti~kata energija na to~kata e ednakva na elementarnata rabota na silata koja se izvr{uva vo dadeniot moment.**

Pri kone~no pomestuvawe na to~kata od polo`ba $M_0$ do krajna polo`ba M_1, kineti~kata energija se menuva. Vo polo`ba $M_0$ iznesuva: $T_0 = Ek_0 = \dfrac{m \cdot V_1^2}{2}$ , a vo polo`bata M_1: $T_1 = Ek_1 = \dfrac{m \cdot V_1^2}{2}$,(Sl. 6.4.2).



Sl.6.4.2

So integracija na diferencijalna ravenka (6.4.3) se dobiva:

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{\overline{M_0 M_1}} dA \qquad (6.4.4)$$

$$T_1 - T_0 = A \qquad (6.4.5)$$

Ravenkata (6.4.5) go definira zakonot za promena na kineti~kata energija vo integralna (kone~na) forma, koj glasi:

Promenata na kineti~kata energija pri kone~noto pomestuvawe na to~kata, koe se slu~uva vo kone~en interval od vreme e ednakva na rabotata na silata koja e izvr{ena pri istoto kone~no pomestuvawe na to~kata.

Zakonot za promena na kineti~kata energija mo`e da se napi{e i vo sledna forma:

$$\frac{m\cdot V_1^2}{2} - \frac{m\cdot V_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \qquad (6.4.6)$$

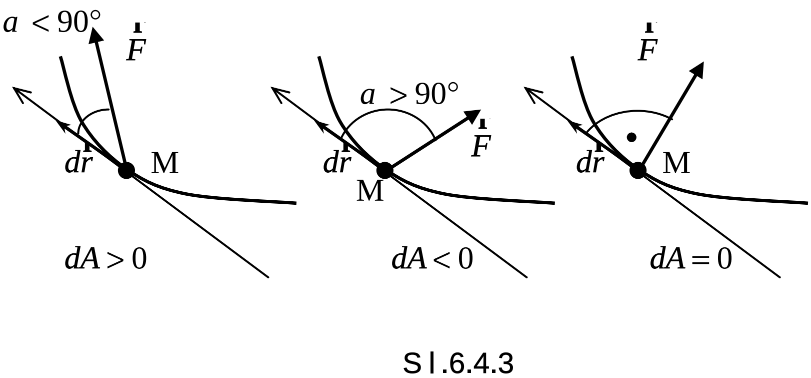
Rabotata na silata pri kone~noto pomestuvawe na to~kata od polo`ba $M_0$ do krajna polo`ba M_1 zavisi od skalarniot proizvod pod integralot koj mo`e da se definira preku komponenti na prirodniot ili dekartoviot koordinaten sistem, odnosno:

$$A = \int_{s_0}^{s_1} F_T(s)ds = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (6.4.7)$$

Od definicijata za elementarna rabota na silata koja dejstvuva na to~kata mo`e da se konstatira deka istata e skalarna golemina koja mo`e da bide pozitivna i negativna. Znakot "+" ili "-" proizleguva od nasokite na silata $\vec{F}$ i elementarnoto pomestuvawe na to~kata $d\vec{r}$. Ednakvo naso~eni vektori opredeluvaat pozitivna rabota, a sprotivno naso~eni vektori negativna rabota. (Sl.6.4.3).

Postoi grani~en slu~aj koga silata e normalna na elementarnoto pomestuvawe, elementarnata rabota e ednakva na nula.

Za opredeluvawe na rabota na silata pri kone~noto pomestuvawe, od polo`ba $M_0$ do krajna polo`ba M_1, potrebno e da se opredeli podintegralnata funcija koja mo`e da zavisi od polo`bata na to~kata (koordinata x,y,z) ili prirodnata koordinata r , a vo poedini slu~ai da se opredeli kako funkcija od vremeto t.



Sl.6.4.3

Rabotata na silata e skalarna golemina so merna edinica: $1Nm = 1J$ (1Xul).

GLAVA 7

NESLOBODNO DVI@EWE NA MATERIJALNA TO^KA

7.1 ВОВЕД ВО ДИНАМИКА НА НЕСЛОБОДНО ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА

Во техничката пракса во голем број случаи **движењето на материјалната точка е ограничено од постоењето на врски кои не зависат од почетните услови на движењето и од активните сили. Ваквото движење е наречено неслободно или принудено движење на материјална точка**.

Врските се дефинираат со помошта на равенки и неравенки на кои се потчинети координатите на материјалната точка. Според тоа, равенките на врските се **условени равенки со кои се ограничува слободата на движењето на материјална точка, а со тоа се намалува нејзината подвижност, односно степенот на слобода**.

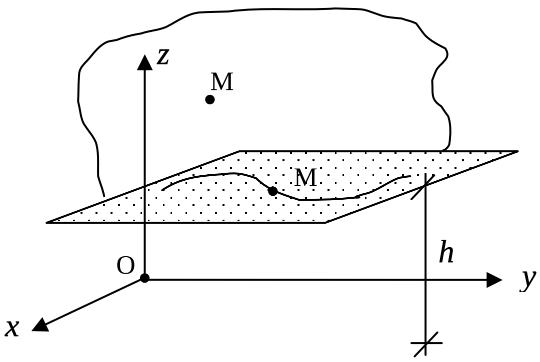
На пример, материјална точка се движи по површината $f(x, y, z)=0$. Почетните кинематички услови како и координатите на точката во секој момент треба да ја задоволат условената равенка. Со тоа, една од координатите е зависна од останатите две независни координати и степенот на слобода се намалува и изнесува k=2.

Во динамиката се користат нај различни видови на врски. За наједноставни врски се третираат **геометриските или холономните со кои се ограничува само положбата на точката**, односно нејзините координати, на пример, површината $f(x, y, z)=0$.

Како посложени врски се таканаречените **кинематички или нехолономни врски со кои освен положбата се ограничува и брзината на точката**, на пример, равенката на врска $j\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right)=0$.

Постојат така наречени **стационарни или постојани врски кои не се менуваат со текот на времето и нестационарни или менливи кои се менуваат со текот на времето**, на пример $f(x, y, z, t)=0$..

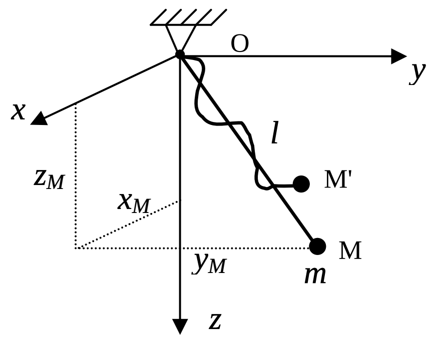
Врските можат да извршат ограничување на движењето на точката и во некоја област на определена површина, на пример $f(x, y, z) \geq 0$. Точката може да остане на површината, но може и да се одвои од истата. **Станува збор за таканаречени еднострани или незадржувачки врски.**



Сл.7.1.1

На пример, рамнината $z \geq h$. Движењето на точката е во рамнината и во просторот над неа. (Сл.7.1.1).

Спротивно на едностраните врски се **двостраните или задржувачки врски при кои точката останува да се движи по врската и истата не може да ја напушти**. На пример, принудено движење по врска определена во пресек на две површини $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)=0$, односно линија во простор. (Сл.7.1.2).



Сл. 7.1.2

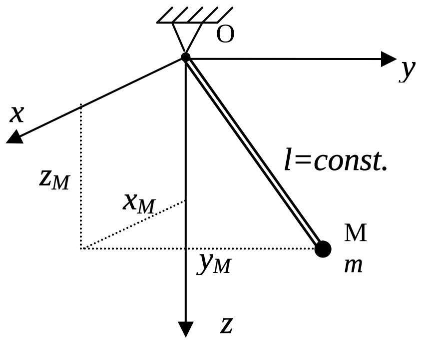
Пример: Незадржувачка или еднострана врска може да биде и конец чии крај во точката M содржи маса m, а во почетокот O е обесен за неподвижна потпора. Равенката и неравенката е:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$$

, каде е $\overline{OM} = l$.

За време на ротацијата, конецот може да ја приближи точката M кон центарот на ротацијата, на пример во положба M'.

Ако конецот се замени со крут стап (Сл.7.1.3) и на крајот се обеси точката M со маса m, равенката на врска се добива во форма:



Сл. 7.1.3

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

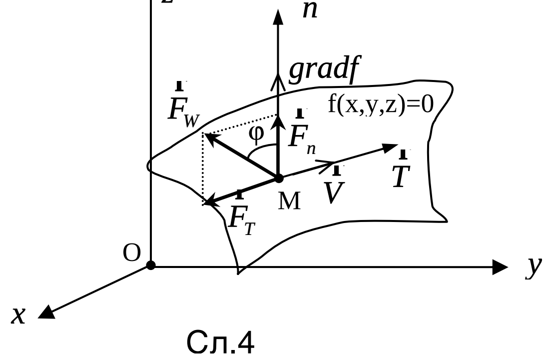
Во овој случај врската е задржувачка или двострана. Точката е принудена да се движи по површината на топка.

Материјална точка која е принудена да се движи по дадена врска под дејство на некоја сила $\vec{F}$, ќе има влијание на врската кое е изразено со сила на притисок.

Според третиот закон на Њутн, врската која е материјална ќе дејствува со спротивна сила, која е еднаква по интензитет и правец на силата на притисок. Ваквите спротивни или реактивни сили се наречени динамички реакции на врски. Следува, дека дејството од врската врз материјалната точка се определува преку реакцијата на врската $\vec{F}_W$

При принудено движење на материјална точка по површина се користи **принципот на ослободување**, и влијанието од врската врз точката се изразува преку реакција на врската $\vec{F}_W = \vec{R}_W$.

Реакцијата $\vec{F}_W$ се разложува во две компоненти, **нормална** $\vec{F}_n$ **и тангенцијална** $\vec{F}_T$.



Сл.4

Нормалната реакција е со правец и насока на позитивно ориентираната нормала $\vec{n}$ на површина во точката M, односно градиентот на површината *gradf* (Сл.7.1.4).

Тангенцијалната компонента $\vec{F}_T$ е сила на триење која лежи во тангенцијалната рамнина на точката M, и има правец на брзината на точката а насока спротивна на движењето (Сл.7.1.4).

Нормалната реакција може да се определи во зависност од равенката на врската чие дејство е изразено преку градиентот, односно:

$$\vec{F}_n = \lambda \cdot gradf \tag{7.1.1}$$

каде се: $gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

λ – е скаларен множител,

Градиентот на површината е векторска карактеристика за секоја точка од површината $f(x, y, z) = 0$.

Според **Кулоновиот закон интензитетот на силата на триење изнесува**:

$$F_T = \mu \cdot F_n \tag{7.1.2}$$

каде е: $\mu = tg\varphi$ - коефициент на кинетичко триење при лизгање.

Тоталната реакција на врска е:

$$\vec{F}_W = \vec{F}_n + \vec{F}_T \tag{7.1.3}$$

интензитетот е: $F_W = \sqrt{F_n^2 + F_T^2} = \lambda \cdot |gradf|\sqrt{1+\mu^2}$,а правецот со нормалата заклопува агол φ кој се определува според коефициентот на кинетичко триење при лизгање, добиен по експериментален пат.

Според реакцијата на врската постојат два вида на врски:

- **Идеални или глатки**, односно апстрактни врски кога се исклучува влијанието од силата на триење $\left(\vec{F}_T = 0\right)$, а $\vec{F}_W = \vec{F}_n$
- **Неидеални или рапави**, односно реални врски кога реакцијата на врската со правецот на нормата $\vec{n}$ заклопува агол φ, односно $\vec{F}_W = \vec{F}_n + \vec{F}_T$.

7.2 ПРИНУДНО ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА ПО ПОВРШИНА

Нека е дадена материјална точка која е принудена да се движи по холономна стационарна површина f(x,y,z)=0. **Диференцијалната равенка на принудното движење на материјалната точка ќе произлезе од принципот на ослободување од врската и вториот закон на Њутн.** Ако точката е под дејство и на активна сила, се добива следната диференцијална равенка:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_A + \vec{F}_W \tag{7.2.1}$$

односно:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_A + \vec{F}_n + \vec{F}_T \tag{7.2.2}$$

Ако се изразат изразат норналната компонента $\vec{F}_N$ и тангенцијалната компонента $\vec{F}_T$ со компоненти во Декартовиот координатен систем:

$$\vec{F}_N = l\,grad f = l\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + l\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + l\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = F_{Nx}\vec{i} + F_{Ny}\vec{j} + F_{Nz}\vec{k} \qquad (7.2.3)$$

$$\vec{F}_T = -F_T\frac{\vec{r}}{r} = -\left(F_T\frac{\dot{x}}{r}\vec{i} + F_T\frac{\dot{y}}{r}\vec{j} + F_T\frac{\dot{z}}{r}\vec{k}\right) = F_{Tx}\vec{i} + F_{Ty}\vec{j} + F_{Tz}\vec{k} \qquad (7.2.4)$$

се добиваат следните аналитичките диференцијални равенки:

$$\begin{aligned} m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= F_{Ax} + F_{nx} + F_{Tx} \\ m\cdot\frac{d^2y}{dt^2} &= F_{Ay} + F_{ny} + F_{Ty} \\ m\cdot\frac{d^2z}{dt^2} &= F_{Az} + F_{nz} + F_{Tz} \end{aligned} \qquad (7.2.5)$$

Равенките (7.2.5) се диференцијални равенки од втор ред, и се познати во литературата како **Лагранжови равенки на движење од прв ред**, при движење на точка по површина f(x,y,z)=0.

Со Лагранжовите равенки на движење од прв ред, со почетните услови на движењето и со равенките на врските наполно се определува принудното движење на материјалната точка, преку нејзиниот закон на движење и динамичките реакции на врски.

Законот на движење се определува со равенките:

$$\begin{aligned} x &= x(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y &= y(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)\,, \\ z &= z(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{aligned}$$

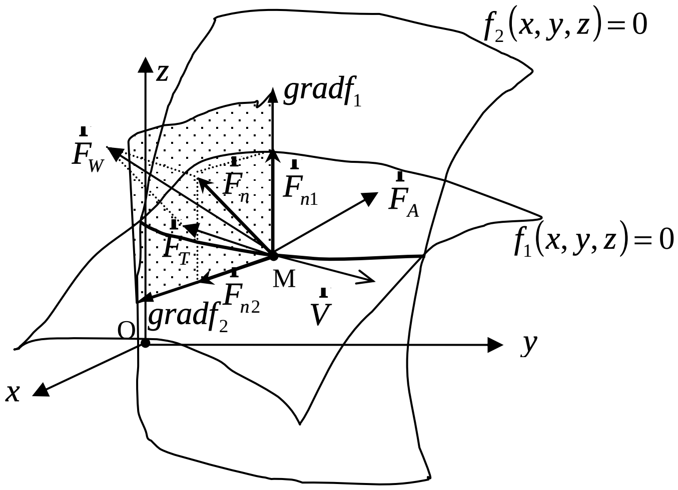
а реакцијата на врската преку компонентите $F_n = \sqrt{F_{nx}^2 + F_{ny}^2 + F_{nz}^2}$ и $F_T = m\cdot F_n$, односно тоталната реакција на врска $F_W = \sqrt{F_n^2 + F_T^2}$.

При движење на материјална точка по неидеална врска се исклучува тангенцијалната компонента, односно силата на триењето, $\vec{F}_T = 0\left(F_{Tx} = F_{Ty} = F_{Tz} = 0\right)$.

7.3. ПРИНУДНО ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА ПО ЛИНИЈА

Материјалната точка со маса m е принудена да се движи по стационарна холономна реална врска орпеделена со равенките $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$, под дејство на сила $\vec{F}=\vec{F}_A$.

Двете равенки дефинираат линија во просторот определена во пресекот на двете површини. Се користи принципот на ослободување на материјалната точка од врската и влијанието од истата се заменува со реакцијата $\vec{F}_W$.



Сл. 7.3.1

Нека е дадено принудното движење во Декартовиот координатен систем (Сл.7.3.1). Од двете површини произлегуваат компонентите на тоталната реакција на врска.

$$\vec{F}_W=\vec{F}_{W1}+\vec{F}_{W2} \tag{7.3.1}$$

каде се:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{W1}&=\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{T1}=l_1\cdot gradf_1-F_{T1}\frac{\vec{n}}{n}\\ \vec{F}_{W2}&=\vec{F}_{n2}+\vec{F}_{T2}=l_2\cdot gradf_2-F_{T2}\frac{\vec{n}}{n}\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Тангенцијалната компонента изнесува:

$$\vec{F}_T=\vec{F}_{T1}+\vec{F}_{T2}=-(F_{T1}+F_{T2})\frac{\vec{n}}{n}=-F_T\frac{\vec{n}}{n} \tag{7.3.3}$$

каде се: $F_{T1}=m\cdot F_{n1}=m\cdot l_1\cdot\left|gradf_1\right|$, $F_{T2}=m\cdot F_{n2}=m\cdot l_2\cdot\left|gradf_2\right|$

Диференцијалната равенка на принудното движење се определува од вториот Њутнов закон:

$$m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_A+\vec{F}_W \tag{7.3.4}$$

Со замена на (7.3.1),(7.3.2) и (7.3.3) во равенката (7.3.4) се добива следната диференцијална равнека на принудно движење по линија:

$$m\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_A+l_1\cdot gradf_1+l_2\cdot gradf_2-F_T\frac{\vec{n}}{n} \tag{7.3.5}$$

Со проекција на векторската равенка (7.3.5) по однос на координатните оски се добиваат следните диференцијални равенки на принудното движење на точка по линија во скаларна форма:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_{Ax} + l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{F_T}{n}\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_{Ay} + l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{F_T}{n}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (7.3.6)$$
$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_{Az} + l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial z} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{F_T}{n}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Со трите диференцијални равнеки се определени Лагранжовите равенки од прв ред на принудено движење по линија.

Интегралите на диференцијалните равенки, почетните кинематички услови на движењето на точката M и равенките на врските, наполно го определуваат принудното движење на материјалната точка по линија. Освен законот на движење, кој е определен со трите координати $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ се определува и динамичката реакција на врска $\vec{F}_W$.

Динамичката реакција $\vec{F}_W$ се определува на следниот начин:

$$\vec{F}_W = \vec{F}_{W1} + \vec{F}_{W2} = l_1 \cdot gradf_1 + l_2 \cdot gradf_2 - F_T \frac{\vec{n}}{n} \qquad (7.3.7)$$

односно:

$\vec{F}_W = \vec{F}_n + \vec{F}_T$, каде е: $\vec{F}_n = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} = l_1 \cdot gradf_1 + l_2 \cdot gradf_2$

Компонентите на нормалната динамичка реакција $\vec{F}_n$ во декартовиот координатен систем се определуваат од равенките:

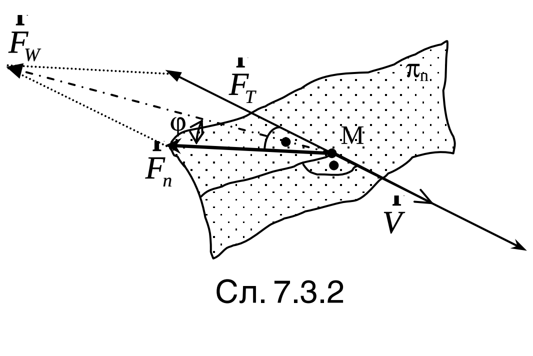
$$F_{nx} = l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}$$
$$F_{ny} = l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad (7.3.8)$$
$$F_{nz} = l_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial z} + l_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

интензитетот на $\vec{F}_n$ изнесува:

$$F_n = \sqrt{F_{nx}^2 + F_{ny}^2 + F_{nz}^2} \qquad (7.3.9)$$

Тангенцијална динамичка реакција на врска:

$$\left|\vec{F}_T\right| = \left|\vec{F}_{T1}\right| + \left|\vec{F}_{T2}\right| = m \cdot \left|\vec{F}_{n1}\right| + m \cdot \left|\vec{F}_{n2}\right| = m\left(l_1 \cdot \left|gradf_1\right| + \left|l_2 \cdot gradf_2\right|\right) \qquad (7.3.10)$$



Сл. 7.3.2

$\vec{F}_n$ **лежи во нормалната рамнина** p_u **нормална на тангентата на траекторијата , а** $\vec{F}_T$ **во правец на тангентата,** а **насока спротивна на насоката на брзината** (Сл.7.3.2).

Интензитетот на тоталната динамичка реакција е:

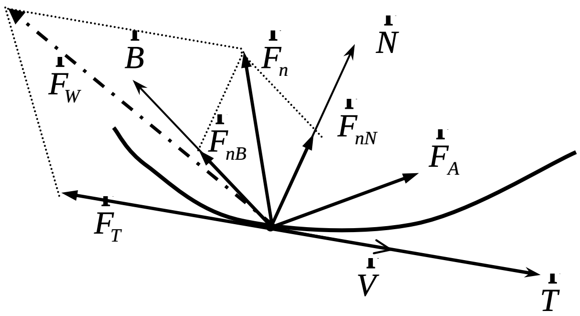
$$F_W = \sqrt{F_n^2 + F_T^2} \tag{7.3.11}$$

Правецот на $\vec{F}_W$ со нормалната компонента го заклопува аголот φ кој е определен преку коефициентот на кинематичко триење при лизгање $tg\varphi = \mu$.

7.4. ПРИНУДНО ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА ПО ЛИНИЈА ВО ПРИРОДЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Принудното движење по линија може да се определи и во природниот координатен систем за просторна линија $M(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$. Се тргнува од векторската равенка:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W$$
$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_n + \vec{F}_T$$



Со проектирање на векторската равенка по трите координатни оски се добива:

$$\begin{aligned} m \cdot a_T &= F_{AT} - F_T \\ m \cdot a_N &= F_{AN} + F_{nN} \\ 0 &= F_{AB} + F_{nB} \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Силата на триењето $\vec{F}_T$ е по правец на тангентата на траекторијата, а нормална реакција $\vec{F}_n$ има проекции во однос на главна нормала $\vec{F}_{nN}$ и во однос на бинормалата $\vec{F}_{nB}$. Ако силата на триењето се изрази според Кулоновиот закон $F_T = \mu \cdot F_N$ и компонентите на забрзувањето според формулите за движење во природен координатен систем, равенките (7.4.1) се добиваат во форма:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} &= F_{AT} - \mu F_n \\ m \cdot \frac{V^2}{Rf} &= F_{AN} + F_{nN} \\ 0 &= F_{AB} + F_{nB} \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

Со трите равенки (7.4.2) се дефинира приндуно движење на точка по линија во природен координатен систем.

Законот на движењето и динамичките реакции на врската се определуваат со дадените динамички равенки, почетните услови на движењето и од равенките на врската.

Тоталната реакција на врска $\vec{F}_W$ се определува преку компонентите:

$\vec{F}_W = \vec{F}_n + \vec{F}_T$, и има интензитет:

$F_W = \sqrt{F_n^2 + F_T^2}$, каде што: $F_n = \sqrt{F_{nN}^2 + F_{nB}^2}$, $F_T = m \cdot F_n = m \cdot \sqrt{F_{nN}^2 + F_{nB}^2}$

При принудно движење на точка по линија важи законот за промена на кинетичката енергија, односно:

$$T - T_0 = \int_{M_0M} dA^{\vec{F}_A} + \int_{M_0M} dA^{\vec{F}_T}\text{, или:}$$

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A^{\vec{F}_A} + A^{\vec{F}_T}$$

Работата на нормалната динамичка реакција на врска секогаш е еднаква на нула како резултат од елементарната работа: $dA^{\vec{F}n} = \left(\vec{F}_n, d\vec{r}\right) = 0$ ($\vec{F}_n \perp d\vec{r}$).

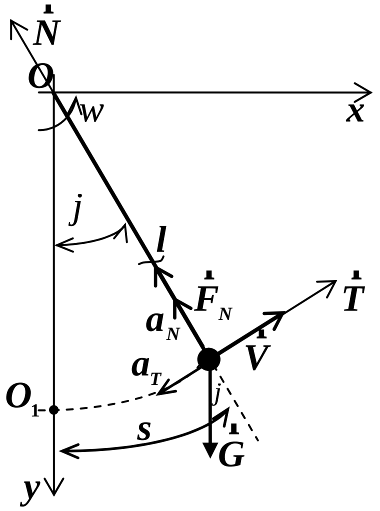
Елементарната работа на тангенцијалната компонента може да се определи од изразот: $dA^{\vec{F}_T} = \left(\vec{F}_T, d\vec{r}\right) = \left(-F_T \frac{\vec{n}}{n}, d\vec{r}\right) = -\left(\vec{F}_T, d\vec{r}\right)$.Следува дека $dA^{\vec{F}_T} < 0$. Според изнесеното може да се констатира дека и **конечната работа на тангенцијалната компонента е секогаш негативна.**

При принудно движење на материјална точка по идеална (глатка) линија, во диференцијалните равенки на движење динамичката реакција на врска $\vec{F}_W = \vec{F}_n$, а тангенцијалната компонента (силата на триењето), $\vec{F}_T = 0$.

При идеални врски промената на кинетичката енергија е резултат од работата на активната сила $\vec{F}_A$.

7.5. MATEMATI^KO NI[ALO

Matemati~ko ni{alo pretstavuva materijalna to~ka obesena na nerasteglivo ja`e so dol`ina l, pricvrsteno vo nepodvi`na to~ka i prinudeno da se dvi`i vo vertikalna ramnina po traektorija koja pretstavuva del od kru`nica: $x^2 + y^2 = l^2$ (Sl.7.5.1).



Sl. 7.5.1

Vo po~etniot moment $t_o = 0$ to~kata se nao|a vo ramnote`nata polo`ba $\overline{OO_1}$. Ako i soop{time po~eten otklon j_o i po~etna aglova brzina w_o taa }e zapo~ne da se dvi`i vo vertikalnata ramnina. Dvi`eweto se vr{i pod dejstvo na silata na zemjinata te`a i reakcijata od vrskata (silata vo ja`eto). Polo`bata na materijalnata to~ka e definirana so agolot $j = j(t)$.

Diferencijalnata ravenka na prinudnoto dvi`ewe glasi:

$$m\vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W \tag{7.5.1}$$

Ako dvi`eweto go razgledame vo priroden koordinaten sistem se dobivaat dve skalarni ravenki:

$$\begin{aligned} m\,a_T &= G_T \\ m\,a_N &= G_N + F_N \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= -G\sin j \\ m\frac{V^2}{l} &= -G\cos j + F_N \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Ako se zeme vo predvid deka: $s = l \cdot j$ i se izvr{i zamena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 j}{dt^2} \tag{7.5.4}$$

se dobiva: $m \cdot l \cdot \dfrac{d^2 j}{dt^2} + G\sin j = 0$ ili:

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin j = 0 \tag{7.5.5}$$

Se razgleduva slu~aj na mali oscilacii (mali otkloni), pa se zema deka e $\sin j \approx j$ i se dobiva homogena diferencijalna ravenka od vtor red so konstantni koeficienti so koja e definirano harmonisko oscilatorno dvi`ewe:

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{g}{l} j = 0 \tag{7.5.6}$$

$\dfrac{g}{l} = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, kade k e kru`nata frekvenca.

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + k^2 j = 0$$

Op{tiot integral koj pretstavuva re{enie na diferencijalnata ravenka glasi:

$$j = A\cos kt + B\sin kt$$
$$\dot{j} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt \qquad (7.5.7)$$

Integracionite konstanti se dobivaat od po~etnite uslovi:

$$t = 0 \Rightarrow j = j_o \,,\, w = w_o = \dot{j}_o \qquad (7.5.8)$$

$$A = j_o \,,\ B = \frac{w_o}{k} \qquad (7.5.9)$$

Ravenkata na harmoniskoto oscilatorno dvi`ewe dobiva oblik:

$$j = j_o \cos kt + \frac{w_o}{k}\sin kt \qquad (7.5.10)$$

Ako se vovede smena:

$$j_o = a \sin b \quad , \quad \frac{w_o}{k} = a \cos b \qquad (7.5.11)$$

ravenkata na harmoniskoto oscilatorno dvi`ewe dobiva poprakti~en oblik:

$$j = a \sin(kt + b) \qquad (7.5.12)$$

kade a e maksimalniot otklon koj go dostignuva to~kata i zavisi od po~etnite uslovi i kru`nata frekvenca:

$$a = \pm\sqrt{j_o^2 + \left(\frac{w_o}{k}\right)^2} \qquad (7.5.13)$$

a b e po~etnata fazna razlika koja isto taka zavisi od po~etnite uslovi i kru`nata frekvenca:

$$b = arc\ tg\ \frac{j_o k}{w_o} \qquad (7.5.14)$$

Periodata na oscilatornoto dvi`ewe ne zavisi od po~etnite uslovi, tuku samo od fizi~kite karakteristiki na matemati~koto ni{alo. Takvo dvi`ewe se narekuva **izohrono**:

$$T = \frac{2p}{k} = 2p\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7.5.15)$$

So zakonot na dvi`eweto $j = j(t)$ se opredeleni site kinemati~ki karakteristiki na dvi`eweto: brzinata, zabrzuvaweto i soodvetnite komponenti vo prirodeni koordinaten sistem a_T i a_N (Sl.7.5.1).

Dinami~kata reakcija na vrska $\vec{F}_N$ (silata vo ja`eto) se opredeluva od vtorata ravenka od ravenka (7.5.3) :

$$F_N = \frac{mV^2}{l} + mg\cos j \qquad (7.5.16)$$

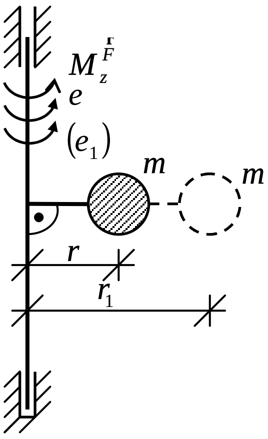
GLAVA 8

MATERIJALNI MOMENTI NA INERCIJA

8.1 ДЕФИНИЦИЈА И ВИДОВИ НА МАТЕРИЈАЛНИ МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА

Материјална точка (модел на материјално тело) со маса m која се движи под дејство на сила $\vec{F}$ добива забрзување кое е пропорционално на силата, а обратно пропорционално на масата. Според тоа, со масата на телото е окарактеризирана инерцијата на телото при промената на движењето. На тело со поголема маса инерцијата е поголема и телото добива помало забрзување. Спротивно, тело со помала маса односно помала инерција, добива поголемо забрзување ако се двете тела под дејство на еднакви сили.

Во случај ако тело со маса m е на растојание r во однос на некоја оска на ротација Oz (Сл.8.1.1).



Сл.8.1.1

Нека системот врши ротација под дејство на момент од сила Mz. Системот добива аглово забрзување e , односно настанува промена во движењето. Со промена на положбата на масата, односно растојанието r се менува и аголовото забрзување e.

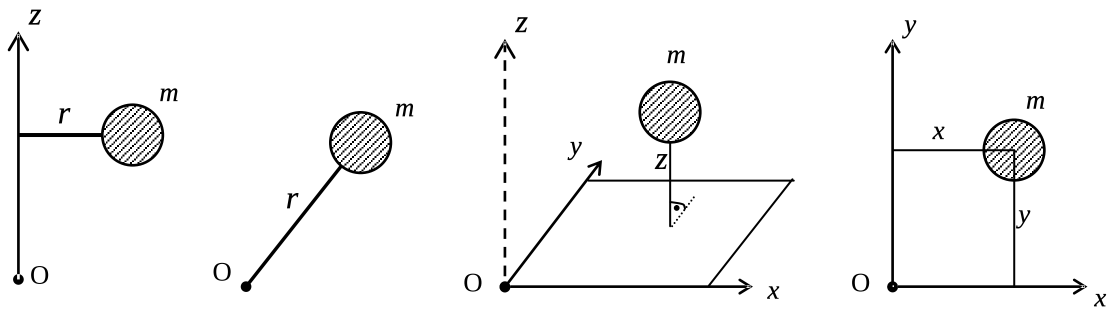
Ако е масата m на растојание $r_1 > r$ аголовото забрзување се намалува, односно $e_1 < e$ во случај на еднаков момент на силата Mz. Материјално тело кое е на поголемо растојание во однос на ротационата оска е со поголема инерција (Сл. 8.1.1).

Експериментот покажува дека својството на инерција при ротација зависи од производот на масата и квадратот на растојанието во однос на избраната оска на ротација, односно $e = \dfrac{Mz^F}{m \cdot r^2}$. **Следува дека инерцијата при ротација во дадениот случај се дефинира со големината** $m \cdot r^2$.

Инерцијата при ротација околу оската Oz окарактеризирана со големина $m \cdot r^2$ е наречена **материјален момент на инерција** во однос на оска Oz и се означува со Jz:

$$Jz = m \cdot r^2 \qquad (8.1.1)$$

Поимот материјален момент може да се генерализира, односно дефинира како големина добиена од производот на масата и квадратот на растојанието во однос на оска, во однос на точка, во однос на рамнина или производот на масата и координатите на положбата на масата во однос на взаемно нормални оски (Сл. 8.1.2).



$Jz = m \cdot r^2$ $\quad$ $J_O = m \cdot r^2$ $\quad$ $\Pi xy = m \cdot z^2$ $\quad$ $Jxy = m \cdot x \cdot y$

a) b) c) d)

Сл. 8.1.2

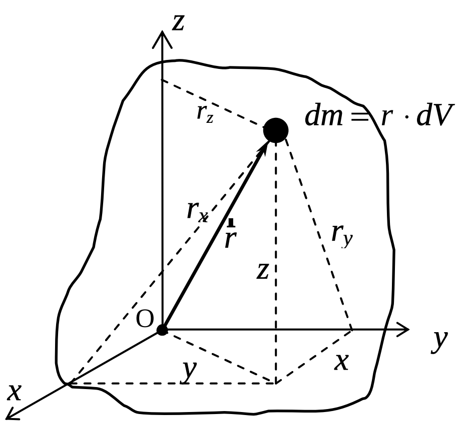
Материјалниот момент на инерција во однос на **оска** е наречен **аксијален материјален момент на инерција**, на пример *Jz* (Сл. 8.1.2a.).

Материјалниот момент на инерција во однос на **точка** е наречен **поларен материјален момент на инерција**, на пример во однос на полот O е *Jo* (Сл.8.1.2b.).

Материјалниот момент на инерција во однос на **рамнина** е наречен **планарен материјален момент на инерција**, на пример во однос на коодинатната рамнина *Oxy*, означен со П*xy* (Сл. 8.1.2c).

Материјалниот момент на инерција во однос на **заемно нормални оски** е наречен **центрифугален материјален момент на инерција**, на пример *Jxy* (Сл. 8.1.2d.).

Димензиите на материјалниот момент на инерција произлегуваат од производот на димензијата на масата и димензијата на квадратот на должината, односно, $[J] = [M \cdot L^2]$, а **мерната единица изнесува 1kgm²**. $1 kg \cdot m^2$ е материјален момент на инерија добиен од тело со маса m=1kg кое се наоѓа на растојание од 1m. во однос на оска, точка или рамнина.



Сл.8.1.3

Нека е дадено **хомогено круто тело со специфична маса (густина)** $r = \dfrac{m}{V} = const. \left[\dfrac{kg.}{m^3}\right]$ и декартов координантен систем *oxyz*, во однос на кој треба да се определат материјалните моменти на инерција. Се избира точка *M* со елементарна маса *dm*, чија положба е определена со векторот $\vec{r}$, односно координатите *x*, *y* и *z* (Сл.8.1.3).

Планарните материјални моменти на елементарната маса *dm* во однос на трите координатни рамнини се:

$$d\Pi oxy = z^2 \cdot dm = z^2 \cdot r \cdot dV$$
$$d\Pi oyz = x^2 \cdot dm = x^2 \cdot r \cdot dV \qquad (8.1.2)$$
$$d\Pi ozx = y^2 \cdot dm = y^2 \cdot r \cdot dV$$

Со определен интеграл по волуменот на телото се определуваат планарните материјални моменти на инерција на материјално тело;

$$\Pi oxy = r \cdot \iiint_V z^2 \cdot dV = r \cdot \int_V z^2 \cdot dV$$
$$\Pi oyz = r \cdot \iiint_V x^2 \cdot dV = r \cdot \int_V x^2 \cdot dV \qquad (8.1.3)$$
$$\Pi ozx = r \cdot \iiint_V y^2 \cdot dV = r \cdot \int_V y^2 \cdot dV$$

Аксијалните материјални моменти на инерција се определуваат во однос на трите координатни оски ox, oy и oz.

Елементарните аксијални материјални моменти на инерција се:

$$dJx = r_x{}^2 \cdot dm = \left(y^2 + z^2\right) \cdot r \cdot dV$$
$$dJy = r_y{}^2 \cdot dm = \left(z^2 + x^2\right) \cdot r \cdot dV \qquad (8.1.4)$$
$$dJz = r_z{}^2 \cdot dm = \left(x^2 + y^2\right) \cdot r \cdot dV$$

Интегралите по волуменот на материјалното тело ги определуваат аксијалните материјани моменти на инерција во однос на трите ортогонални оски:

$$Jx = r \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) dV$$
$$Jy = r \iiint_V \left(z^2 + x^2\right) dV \qquad (8.1.5)$$
$$Jz = r \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dV$$

Материјалниот момент на инерција во однос на координатниот почеток O го определува поларниот материјален момент на инерција Jo.

Елементарен поларен материјален момент на инерција:

$$dJo = r^2 \cdot dm = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot r \cdot dV \qquad (8.1.6)$$

Поларниот материјален момент на инерција Jo се добива со определен интеграл по волуменот на материјалното тело, т.е

$$Jo = r \cdot \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV \qquad (8.1.7)$$

Ако се изврши компарација помеѓу материјалните аксијални и планарни моменти на инерција и поларниот материјален момент на инерција, ќе се констатираат следните заемни зависности:

$$Jo = \Pi oxy + \Pi oyz + \Pi ozx = \frac{1}{2}\left(Jx + Jy + Jz\right)$$
$$Jx = \Pi oxy + \Pi ozx \qquad (8.1.8)$$
$$Jy = \Pi oyz + \Pi oxy$$
$$Jz = \Pi ozx + \Pi oyz$$

Аксијалниот материјален момент на инерција во однос на некоја оска секогаш е поголем од разликата, а помал од збирот на аксијалните материјални моменти на инерција во однос на останатите две оски, односно:

$$Jx - Jy < Jz < Jx + Jy$$
$$Jy - Jz < Jx < Jy + Jz \qquad (8.1.9)$$
$$Jz - Jx < Jy < Jz + Jx$$

Центрифугалните материјални моменти на инерцијата се определуваат во однос на взаемно нормалните координатни оски. Елементарните материјални моменти на инерција се добиваат од производот на елементарната маса dm и растојанијата во однос на оригиналните оски, т.е:

$$dJxy = x \cdot y \cdot dm = r \cdot x \cdot y \cdot dV$$
$$dJyz = y \cdot z \cdot dm = r \cdot y \cdot z \cdot dV \qquad (8.1.10)$$
$$dJzx = z \cdot x \cdot dm = r \cdot z \cdot x \cdot dV$$

Интегралите на равенките (8.1.10) ги определуваат центрифугалните материјални моменти на инерција на телото во однос на избраниот координатен систем:

$$Jxy = r \cdot \iiint_V x \cdot y \cdot dV$$
$$Jyz = r \cdot \iiint_V y \cdot z \cdot dV \qquad (8.1.11)$$
$$Jzx = r \cdot \iiint_V z \cdot x \cdot dV$$

Од изведените изрази за определување на материјалните моменти на инерција, произлекува дека **аксијалните, поларниот и планарните моменти на инерција секогаш се позитивни (>0), а центрифугалните можат да бидат позитивни и негативни ($>$ или <0)**.

Со квадратен корен на количникот на аксијалниот материјален момент на инерција и масата на телото се дефинира поимот **радиус на инерција**, на пример:

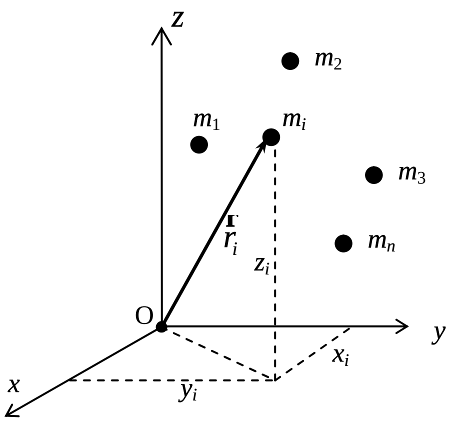
$$i_z = \sqrt{\frac{Jz}{m}} \qquad (8.1.12)$$

Врз основа на равенка (8.1.12) може да се определи равенката:

$$Jz = i_z^{\,2} \cdot m \qquad (8.1.13)$$

Од (8.1.13) може да се заклучи дека за материјалното тело кое е поставено на растојание i_z во однос на оската на ротацијата, материјалниот момент на инерција останува непроменет.

Нека е даден **материјален систем од *n* материјални тела**, дискретно распределени во просторот (Сл.8.1.4).



Сл. 8.1.4

Планарните материјални моменти на инерција се:

$$\Pi oxy = \sum_1^n m_i \cdot z_i^{\,2}$$
$$\Pi oyz = \sum_1^n m_i \cdot x_i^{\,2} \qquad (8.1.14)$$
$$\Pi ozx = \sum_1^n m_i \cdot y_i^{\,2}$$

Аксијалните материјални моменти на инерција се:

$$Jx = \sum_1^n m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)$$
$$Jy = \sum_1^n m_i \left(z_i^2 + x_i^2\right) \qquad (8.1.15)$$
$$Jz = \sum_1^n m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

Поларниот материјален момент на инерција е:

$$Jo = \sum_1^n m_i \left(x_i^{\,2} + y_i^{\,2} + z_i^{\,2}\right) \qquad (8.1.16)$$

Центрифугалните материјални моменти на инерцијата се:

$$Jxy = \sum_1^n m_i \cdot x_i \cdot y_i$$
$$Jyz = \sum_1^n m_i \cdot y_i \cdot z_i \qquad (8.1.17)$$
$$Jzx = \sum_1^n m_i \cdot z_i \cdot x_i$$

8.2 МАТЕРИЈАЛНИ МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА ВО ОДНОС НА ПАРАЛЕЛНИ ОСКИ

Пред да се определат материјалните моменти на инерција за паралелни оски потребно е да се дефинира поимот средиште или центар на маса на материјално тело. **Средиштето или центарот на масите е точка од телото во однос на која статичкиот момент на масата на телото е еднаков на нула, т.е. масата е еднакова на нула, а тоа значи дека масата во однос на оваа точка е рамномерно распределена.**

Со избор на референтен координатен систем Oxyz се дефинира положбата на средиштето, односно центарот C, преку радиус векторот $\vec{r}_C$ определен од равенката:

$$\vec{r}_C = \frac{\iiint\limits_{(m)} \vec{r} \cdot dm}{m} = \frac{r \cdot \iiint\limits_{(V)} \vec{r} \cdot dV}{m} \tag{8.2.1}$$

Проекциите на векторската равенка (1) се трите координати:

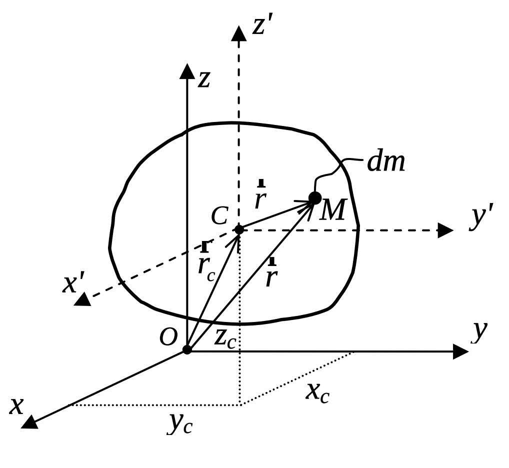
$$x_C = \frac{r \cdot \iiint\limits_{(V)} x \cdot dV}{m}; \quad y_C = \frac{r \cdot \iiint\limits_{(V)} y \cdot dV}{m}; \quad z_C = \frac{r \cdot \iiint\limits_{(V)} z \cdot dV}{m}; \tag{8.2.2}$$

За определувањ е на паралелни материјални моменти на инерција се избираат два паралелни координатни системи и тоа: $Cx'y'z' \parallel Oxyz$ (Сл.8.21).

Произволна точка M со елементарна маса dm, има вектор на положба $\vec{r}$ во однос на $Oxyz$ и вектор на положба $\vec{r}$ во однос на $Cx'y'z'$.

Врските помеѓу векторот $\vec{r}$ и $\vec{r}$ се дадени со следната равенка:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r} \tag{8.2.3}$$



Сл. 8.2.1

Проекциите на векторската равенка се:

$$\begin{aligned} x &= x_C + x' \\ y &= y_C + y' \\ z &= z_C + z' \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

каде се: $x_C = const.$, $y_C = const.$ и $z_C = const.$

Аксијалниот момент на инерција во однос на координатната оска Ox:

$$J_x = r\iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)dV = r\iiint\limits_V \left[(y_C + y')^2 + (z_C + z')^2\right]dV =$$
$$= {y_C}^2 \cdot r\iiint\limits_V dV + 2y_C \cdot r\iiint\limits_V y' \cdot dV + r\iiint\limits_V y'^2 \cdot d +$$
$$+ {z_C}^2 \cdot r\iiint\limits_V dV + 2z_C \cdot r\iiint\limits_V z' \cdot dV + r\iiint\limits_V z'^2 \cdot dV =$$
$$= \left({y_C}^2 + {z_C}^2\right)\cdot r\iiint\limits_V dV + r\iiint\limits_V \left(y'^2 + z'^2\right)dV = \left({y_C}^2 + {z_C}^2\right)\cdot m + J_{x'} \tag{8.2.5}$$

Изразите: $r\iiint\limits_V y' \cdot dV = 0$, $r\iiint\limits_V z' \cdot dV = 0$ се резултат од **статичкиот момент на масата во однос на средиштето кој е еднаков на нула**.

Материјалниот момент на инерција во однос на координатната оска Ox се изразува во следнава форма:

$$J_x = J_{x'} + \left({y_C}^2 + {z_C}^2\right)\cdot m \tag{8.2.6}$$

каде $J_{x'}$ **е материјален момент на инерција за оската која минува низ центарот C и е наречен сопствен материјален момент на инерција**. **Вториот член**, кој зависи од референтниот координатен систем $Oxyz$ во однос на кој е определен центарот C, го дефинира **положбениот материјален момент на инерција**. На овој начин , според **Штајнеровата теорема: Материјалниот момент на инерција за некоја произволна оска во телото е еднаков на збирот од сопствениот материјален момент на инерција за паралелна оска и положбениот материјален момент на инерција.**

Положбениот материјален момент на инерција се определува со производот на масата и квадратот на растојанието помеѓу разгледуваната оска и паралелната оска во центарот на материјалното тело.

Аналогно се определуваат материјалните моменти на инерција во однос на дополнителните координативни оски Oy и Oz, односно:

$$J_y = J_{y'} + \left({z_C}^2 + {x_C}^2\right)\cdot m$$
$$J_z = J_{z'} + \left({x_C}^2 + {y_C}^2\right)\cdot m \tag{8.2.7}$$

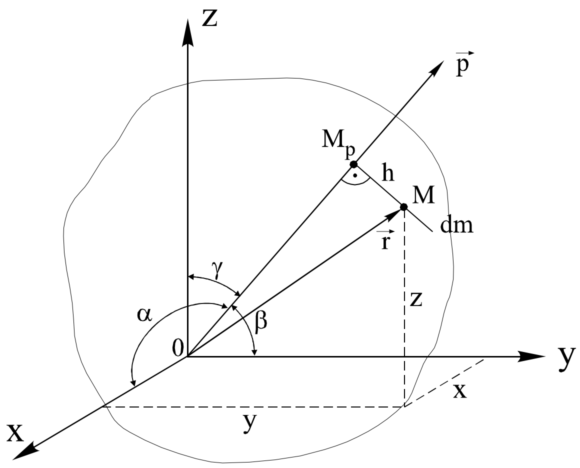
Штајнеровата теорема важи и за центрифугалните материјални моменти на инерција. За избраниот референтен координатен систем $Oxyz$ се добиваат следните центрифугални моменти на инерција:

$$J_{xy} = J_{x'y'} + m \cdot x_C \cdot y_C$$
$$J_{yz} = J_{y'z'} + m \cdot y_C \cdot z_C \tag{8.2.8}$$
$$J_{zx} = J_{z'x'} + m \cdot z_C \cdot x_C$$

8.3 МАТЕРИЈАЛЕН МОМЕНТ НА ИНЕРЦИЈА ВО ОДНОС НА ПРОИЗВОЛНА ОСКА

Нека е дадено материјално тело со материјалните моменти на инерција Jx, Jy, Jz, Jxy, Jyz и Jzx определени во однос на избраниот координатен систем $OXYZ$ (Сл. 8.3.1). **Треба да се определи материјалниот момент на инерција во однос на произволна оска која минува низ координатен почеток и има правец и насока определени со ортот:**

$$\vec{p} = cos\,\alpha\vec{i} + cos\,\beta\vec{j} + cos\,\gamma\vec{k} \tag{8.3.1}$$



Сл. 8.3.1

Елементарниот материјалаен момент на инерција во однос на оската p:

$$dJp = dm \cdot \overline{MM_p}^2 = dm \cdot h^2 = \rho \cdot dv \cdot h^2 \tag{8.3.2}$$

Растојанието од точката М до $\vec{p}$:

$$h^2 = \overline{MM_p}^2 = r^2 - \overline{OM_p}^2 \tag{8.3.3}$$

или

$$\begin{aligned} h^2 &= (x^2+y^2+z^2) - (\vec{r},\vec{p})^2 = x^2+y^2+z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = \\ &= x^2+y^2+z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma - \\ &- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha = \\ &= x^2(1-\cos^2\alpha) + y^2(1-\cos^2\beta) + z^2(1-\cos^2\gamma) - \\ &- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha = \\ &= x^2(\cos^2\beta+\cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) - \\ &- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha = \\ &= \cos^2\alpha(y^2+z^2) + \cos^2\beta(z^2+x^2) + \cos^2\gamma(x^2+y^2) - \\ &- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

Со замена на изразот (8.3.4) во (8.3.2) и по извршената integracija se dobiva materijalniot moment na inercija vo odnos na proizvolnata oska p vo forma:

$$Jp=\int dJp=\cos^2 a\cdot r\iiint\limits_V(y^2+z^2)dv+\cos^2 b\cdot r\iiint\limits_V(z^2+x^2)dv+\cos^2 g\cdot r\iiint\limits_V(x^2+y^2)dv-$$

$$-2\cos a\,\cos b\cdot r\iiint\limits_V xydv-2\cos b\,\cos g\cdot r\iiint\limits_V yzdv-2\cos g\,\cos a\cdot r\iiint\limits_V zxdv$$

Дефинитивно се добива следниот материјален момент на инерција во однос на произволната оска p :

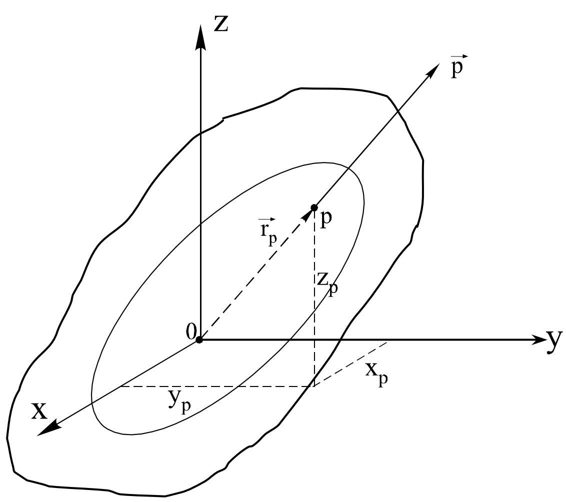
$$Jp=Jx\cdot cos^2\alpha+Jy\cdot cos^2\beta+Jz\cdot cos^2\gamma-$$
$$-2Jxy\cdot cos\,\alpha\,cos\,\beta-2Jyz\,cos\,\beta\,cos\,\gamma-2Jzx\cdot cos\,\gamma\,cos\,\alpha \tag{8.3.5}$$

За да се прикаже промената на матаријалниот момент на инерција со промената на правецот на оската која минува низ референтната точка *0* се користи следната геометриска интерпретација.

Се избира точка p на произволната оска $\vec{p}$ на растојание r_p во однос на *0,* односно:

$$r_p=\frac{1}{\sqrt{J_P}} \tag{8.3.6}$$

Правецот на ортот $\vec{p}$ е определено со:



Сл. 8.3.2

$$cos\,\alpha=\frac{x_p}{r_p}=x_p\sqrt{J_p}=x\sqrt{J_p}$$

$$cos\,\beta=\frac{y_p}{r_p}=y_p\sqrt{J_p}=y\sqrt{J_p} \tag{8.3.7}$$

$$cos\,\gamma=\frac{z_p}{r_p}=z_p\sqrt{J_p}=z\sqrt{J_p}$$

Со замена на изразите (8.3.7) во изразот (8.3.5) се добива следната равенка:

$$J_x\cdot x^2+J_y\cdot y^2+J_z\cdot z^2-2J_{xy}\cdot x\cdot y-2J_{yz}\cdot z\cdot y-2J_{zx}\cdot z\cdot x=1 \tag{8.3.8}$$

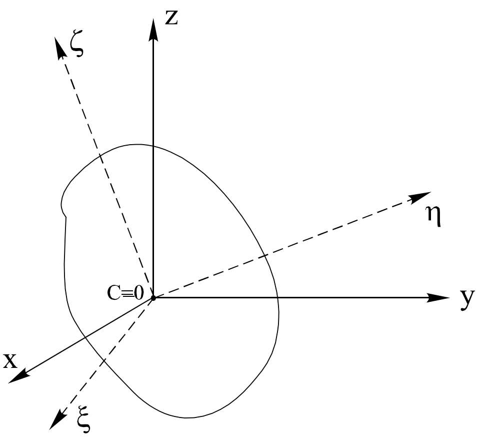
Со равенката (8.3.8) е определена површината на еллипсоид. Според тоа, **крајот на векторот $\vec{r}_p$ опишува елипсоид кој е наречен елипсоид на инерција,** со помошта на кој е дефинирана состојбата на инерцијата на материјалното тело.

Материјалниот момент на инерција J_p е обратно пропорционален со квадратот на растојание, од центарот на елипсоидот до елипсоидната површина:

$$J_p = \frac{1}{r_p^2} \tag{8.3.9}$$

8.4 ГЛАВНИ ЦЕНТРАЛНИ ОСКИ, ГЛАВНИ ЦЕНТРАЛНИ МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА, ЕЛИПСОИД НА ИНЕРЦИЈА

Oski koi pominuvaat niz centarot na masata na materijalno telo se nare~eni centralni oski, a momentite na inercija centralni momenti na inercija. (Sl. 8.4.1)



Sl. 8.4.1

Vo centarot na masata mo`at da se oformat beskone~no mnogu ortogonalni koordinatni sistemi.

Postoi eden ortogonalen koordinaten sistem , C,ξ,η,ζ, vo odnos na koj materijalnite asijalni momenti imaat ekstremni vrednosti, a centrifugalnite se ednakvi na nula, odnosno:

$$J_\xi = J_{max}\ , J_\eta\ , J_\zeta = J_{min}\ , J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\xi} = 0 \tag{8.4.1}$$

Оските на координатниот систем C,ξ,η,ζ се наречени главни централни оски, а моментите на инерција главни централни моменти на инерција.

Ортогоналните оски ξ,η и ζ содржат **три заемно нормални полуоски на елипсоидот на инерција a,b и c наречени главни полуоски, со особини** $a = a_{min}\ , b = b\ , c = c_{max}$, **односно** $a < b < c$. Главните полуоски се определуваат покрај главните централни моменти на инерција:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_\xi}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_\eta}} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_\zeta}} \tag{8.4.2}$$

Равенката на елипсоидот на инерција се определува во однос на главните централни оски и се добива во форма:

$$\xi^2 J_\xi + \eta^2 J_\eta + \zeta^2 J_\zeta = 1 \tag{8.4.3}$$

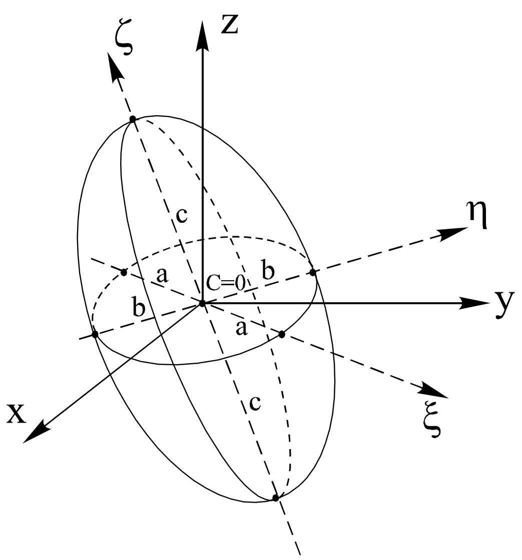
Од изразите (8.4.2) се добиваат главните централни моменти на инерција во функцијата од полуоските на елипсоидот на инерција:

$$J_\xi = \frac{1}{a^2} \quad ; \quad J_\eta = \frac{1}{b^2} \quad ; \quad J_\zeta = \frac{1}{c^2} \tag{8.4.4}$$

Со замена на главните централни моменти на инерција (8.4.4) во равенка (8.4.3) се добива **равенката на елипсоидот на инерција во сегментен облик**:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \tag{8.4.5}$$

Со равенките (8.4.3) и (8.4.5) се дефинира **централниот елипсоид на инерција** преку главните централни оски. **Со истиот е окарактеризирана состојбата на инерцијата на материјалното тело (Сл.8.4.2) во однос на централните оски.**



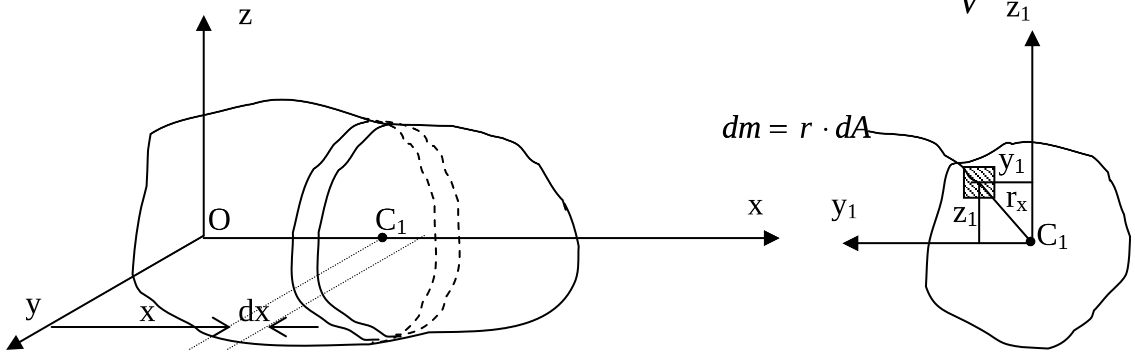
Sl. 8.4.2

Материјалните моменти на инерција во однос на централните оски на телото секогаш достигнуваат најмали вредности (според Штајнеровата теорема).

Главните оски можат да се дефинираат и во однос на било која точка A од телото, ако истата се усвои за референтна точка. Определувањето на правците на главните оски е сложена задача. Во динамиката најголема примена имаат симетричните тела чии оски на симетрија се совпаѓаат со главните централни оски.

8.5. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА МАТЕРИЈАЛНИ МОМЕНТИ НА ИНЕРЦИЈА ПО МЕТОД НА ПРЕСЕЦИ

Во соодветен референтен координатен систем Oxyz разгледуваме хомогено материјално тело со специфична волуменска маса $r = \frac{m}{V}$.



Сл. 8.5.1

Телото го пресекуваме со две бескрајно блиски рамнини паралелни на една од координатните рамнини, на пример Oyz.

Се оформува бескрајно тенка плоча со дебелина dx, на растојание x од координатниот почеток. Површината на плочата ја означуваме со A, волуменот $dV = A \cdot dx$, додека нејзината маса изнесува $dM = dV \cdot r = r \cdot A \cdot dx$.

a) Materijalen moment na inercija okolu **oskata Ox:**

Материјален момент на инерција на плочата со дебелина dx го добиваме како производ од елементарната маса $dm = dA \cdot r \cdot dx$ и квадратот од растојанието до оската x:

$$dJx = dJ_{C1} = \int_m r_x^2 dm = \int_{(A)} r_x^2 \, r \cdot dA \cdot dx = dx \cdot r \int_{(A)} r_x^2 dA = dx \cdot r \cdot f_{C1}$$

каде што: f_{C1} - поларен момент на инерција на попречниот пресек

Материјален момент на инерција на телото го добиваме со интеграција на моментот на инерција на плочата по должина l:

$$\boxed{Jx = \int_{(l)} dJx = r \int_{(l)} f_{C1} \cdot dx} \qquad (8.5.1)$$

b) Materijalniot moment na inercija na elementarnata plo~a okolu **oskata Oy** go dobivame kako zbir od sopstveniot moment na inercija okolu oskata y_1 i polo`beniot moment na inercija vo odnos na oskata y:

$$dJy = dJ_{y1} + dM \cdot x^2 = \int_m z_1^2 dm + r \cdot A \cdot dx \cdot x^2 = \int_{(A)} z_1^2 \cdot r \cdot dA \cdot dx + r \cdot A \cdot x^2 \cdot dx$$

$$dJy = r \left[\int_{(A)} z_1^2 \cdot dA + A \cdot x^2 \right] dx$$, при што:

$\int\limits_{(l)} z_1^2 \cdot dA = f_{y1}$ претставува сопствен момент на инерција на попречниот пресек во однос на оската Oy_1.

$$dJy = r\left[f_{y1} + A \cdot x^2\right]dx$$

Материјален момент на инерција на телото го добиваме со интеграција на моментот на инерција на плочата по должина l:

$$\boxed{Jy = \int\limits_{(l)} dJy = \int\limits_{(l)} r\left[f_{y1} + A \cdot x^2\right]dx} \qquad (8.5.2)$$

Аналогно се определува и материјалниот мемент на инерција во однос на **оската Oz:**

$$dJz = dJ_{z1} + dM \cdot x^2 = \int\limits_m y_1^2 dm + r \cdot A \cdot dx \cdot x^2 = \int\limits_{(A)} y_1^2 \cdot r \cdot dA \cdot dx + r \cdot A \cdot x^2 \cdot dx$$

$$dJz = r\left[\int\limits_{(A)} y_1^2 \cdot dA + A \cdot x^2\right]dx$$, при што:

$\int\limits_{(l)} y_1^2 \cdot dA = f_{z1}$ претставува сопствен момент на инерција на попречниот пресек во однос на оската Oz_1.

$$dJz = r\left[f_{z1} + A \cdot x^2\right]dx$$

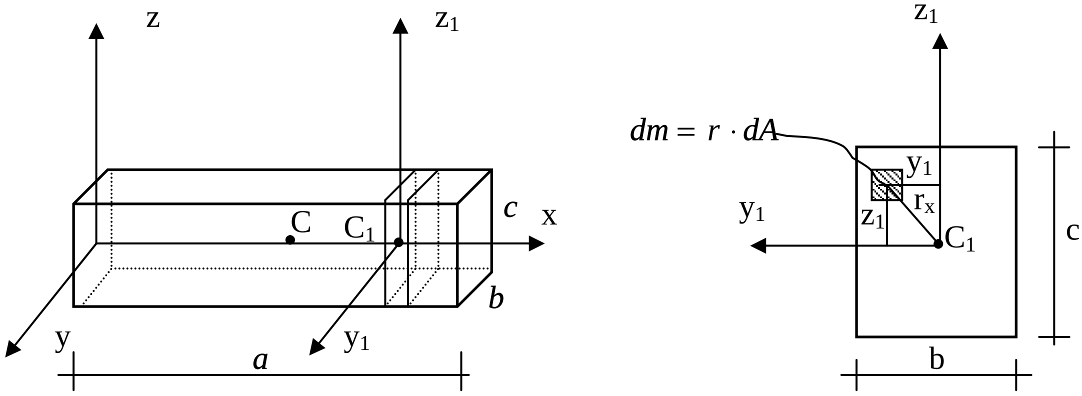
Материјален момент на инерција на телото го добиваме со интеграција на моментот на инерција на плочата по должина l:

$$\boxed{Jz = \int\limits_{(l)} dJz = \int\limits_{(l)} r\left[f_{z1} + A \cdot x^2\right]dx} \qquad (8.5.3)$$

Определување на материјални моменти на инерција на елементарни тела:

1) Призматично тело со димензии a/b/c

Разгледуваме призматично тело со димензии a/b/c. Negovata masa iznesuva $M = r \cdot V = r \cdot a \cdot b \cdot c$.



Сл. 8.5.2

Геометриските моменти на инерција на попречниот пресек во однос на оските y_1 i z_1 изнесуваат:

$$f_{y1} = \frac{b \cdot c^3}{12}$$
$$f_{z1} = \frac{c \cdot b^3}{12} \qquad (8.5.4)$$

поларниот момент на инерција изнесува:

$$f_{C1} = f_{y1} + f_{z1} = \frac{c \cdot b}{12}\left(b^2 + c^2\right) \qquad (8.5.5)$$

Моментот на инерција околу оската x го добиваме со замена на равенката (8.5.5) во равенката (8.5.1):

$$Jx = r\int_0^a f_{C1} \cdot dx = r\int_0^a \frac{c \cdot b}{12}\left(b^2 + c^2\right) \cdot dx = r\,\frac{c \cdot b}{12}\left(b^2 + c^2\right) \cdot a = r\,\frac{a \cdot c \cdot b}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

бидејќи масата на телото $M = V \cdot r = a \cdot b \cdot c \cdot r$, може да се напише дека:

$$Jx = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right) \qquad (8.5.6)$$

$$\boxed{Jx_C = Jx = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)} \qquad (8.5.7)$$

Моментот на инерција околу оската y го добиваме со замена на равенката (8.5.4) во равенката (8.5.2):

$$Jy = r\int_a r\left[f_{y1} + A \cdot x^2\right]dx = \int_0^a \left[\frac{bc^3}{12} + b \cdot c \cdot x^2\right]dx = r\,\frac{abc}{12}\left(c^2 + 4a^2\right) = \frac{M}{12}\left(c^2 + 4a^2\right)$$

$$Jy = \frac{M}{12}\left(c^2 + 4a^2\right) \qquad (8.5.8)$$

Моментот на инерција во однос на тежишните оски го добиваме со примена на Штајнеровата теорема за паралелни оски:

$$Jy_C = Jy - M \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}\left(c^2 + 4a^2\right) - \frac{M \cdot a^2}{4}$$

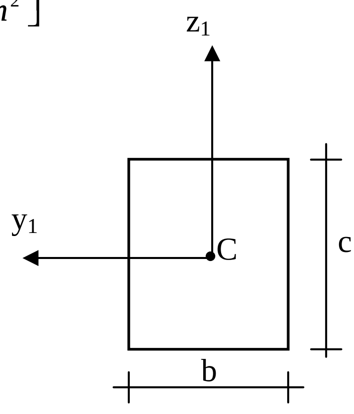
$$\boxed{Jy_C = \frac{M}{12}\left(c^2 + a^2\right)} \qquad (8.5.9)$$

Аналогно моментот на инерција околу оската z го добиваме со замена на равенката (8.5.4) во равенката (8.5.3):

$$Jz = \frac{M}{12}\left(b^2 + 4a^2\right) \qquad (8.5.10)$$

$$\boxed{Jz_C = \frac{M}{12}\left(b^2 + a^2\right)} \qquad (8.5.11)$$

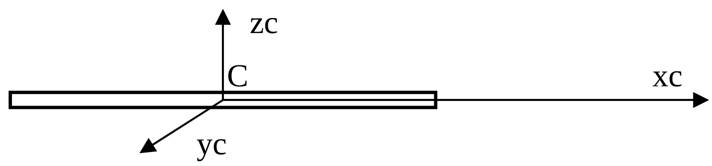
а) Доколку висината на призматичното тело $a \to 0$ се добива правоаголна плоча. Масата на плочата изнесува $M = r \cdot b \cdot c$, односно нејзината специфична површинска маса $r = \frac{M}{A}\left[\frac{kg}{m^2}\right]$.



Материјалните моменти на инерција за правоаголна плоча го добиваме од равенките (8.5.7), (8.5.9) и (8.5.11) со замена на релацијата $a^2 = 0$.

$$\boxed{Jx_C = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)}$$
$$\boxed{Jy_C = \frac{M \cdot c^2}{12}} \qquad (8.5.12)$$
$$\boxed{Jz_C = \frac{M \cdot b^2}{12}}$$

б) Доколку страните на призмата $b \to 0$, $c \to 0$ истата преминува во призматичен стап. Масата на призматичниот стап изнесува $M = r \cdot l$, додека нејзината специфична должинска маса $r = \frac{M}{l}\left[\frac{kg}{m'}\right]$.

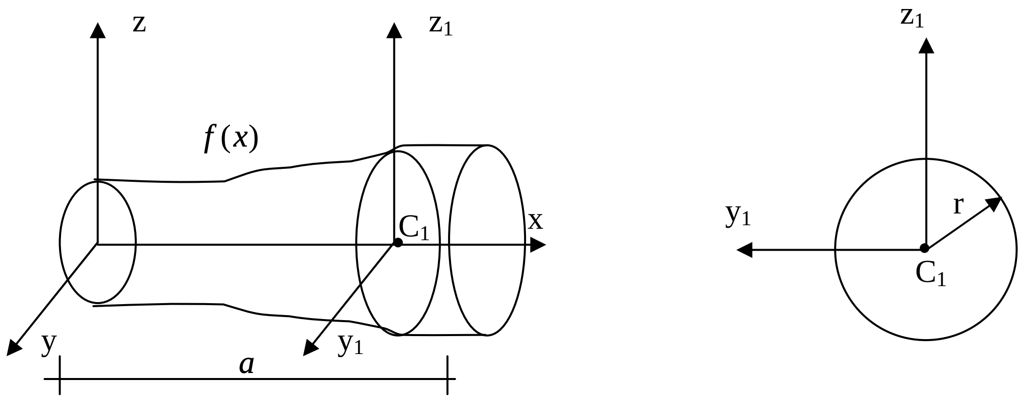


Материјалните моменти на инерција за стапот ги добиваме со замена на релациите $b^2 = 0$ и $c^2 = 0$ во равенките (8.5.7), (8.5.9) и (8.5.11)

$$\boxed{Jx_C = 0}$$
$$\boxed{Jy_C = \frac{M \cdot a^2}{12}} \qquad (8.5.13)$$
$$\boxed{Jz_C = \frac{M \cdot a^2}{12}}$$

2) Ротационо тело

Доколку материјална линија $f(x)$ ротира околу оската x се добива ротационо симетрично тело. Радиусот на попречниот пресек на телото е еднаков на вредноста на функцијата во тој пресек $r = f(x)$.



Површината на попречниот пресек изнесува:

$A = f(x)^2 \cdot p$

Геометриските моменти на инерција на попречниот пресек во однос на оските y_1 i z_1 изнесуваат:

$$f_{y1} = f_{z1} = \frac{f(x)^4 \cdot p}{4} \tag{8.5.14}$$

поларниот момент на инерција изнесува:

$$f_{C1} = f_{y1} + f_{z1} = \frac{f(x)^4 \cdot p}{2} \tag{8.5.15}$$

Моментот на инерција околу оската x го добиваме со замена на равенката (8.5.15) во равенката (8.5.1):

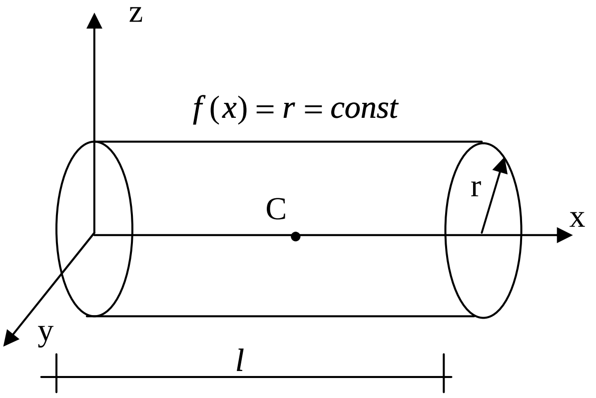
$$Jx = r \int_{(l)} f_{C1} \cdot dx = r \int_{(l)} \frac{f(x)^4 \cdot p}{2} \cdot dx = \frac{r \cdot p}{2} \int_{(l)} f(x)^4 \cdot dx \tag{8.5.16}$$

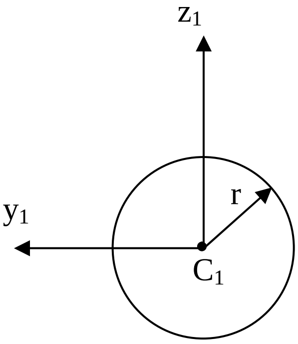
Моментот на инерција околу оските y i z го добиваме со замена на равенката (8.5.14) во равенката (8.5.2) и (8.5.3):

$$\begin{aligned} Jy = Jz &= r \int_{(l)} \left(f_{y1} + A \cdot x^2 \right) \cdot dx = r \int_{(l)} \left(\frac{f(x)^4 \cdot p}{4} + f(x)^2 \cdot x^2 \cdot p \right) dx \\ Jy = Jz &= \frac{r \cdot p}{4} \int_{(l)} \left(f(x)^4 + 4 f(x)^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx \end{aligned} \tag{8.5.17}$$

2.1) Цилиндар:

Доколку функцијата $f(x) = r = const.$ со нејзина ротација околу оската x се добива цилиндрично тело $V = r^2 \cdot p \cdot l \;\; M = r^2 \cdot p \cdot l \cdot r$.





Моментот на инерција околу оската x го добиваме од равенката (8.5.16)

$$Jx = \frac{r \cdot p}{2}\int_0^l r^4 \cdot dx = \frac{r \cdot p \cdot r^2 \cdot l}{2} r^2 = \frac{M \cdot r^2}{2}$$

бидејќи тежишната оска се поклопува со оската x моментот на инерција околу истата се добива:

$$Jx_C = Jx = \frac{M \cdot r^2}{2} \qquad (8.5.18)$$

Моментот на инерција околу оските y i z го добиваме од равенката (8.5.17)

$$Jy = Jz = \frac{r \cdot p}{4}\int_0^l \left(r^4 + 4 \cdot r^2 \cdot x^2\right) \cdot dx = \frac{r \cdot p \cdot r^4 \cdot l}{2} + \frac{r \cdot p}{4} 4 \cdot r^2 \frac{l^3}{3} = \frac{r \cdot p \cdot r^2 \cdot l}{12}\left(3r^2 + 4l^2\right)$$

$$Jy = Jz = \frac{M}{12}\left(3r^2 + 4l^2\right)$$

Моментот на инерција во однос на тежишните оски го добиваме со примена на Штајнеровата теорема за паралелни оски:

$$Jy_C = Jz_C = Jy - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}\left(3r^2 + 4l^2\right) - \frac{M \cdot l^2}{4}$$

$$Jy_C = Jz_C = \frac{M}{12}\left(3r^2 + l^2\right) \qquad (8.5.19)$$

а) Доколку висината на цилидарот $l \to 0$ се добива кружен диск. Масата на дискот изнесува $M = r \cdot r^2 \cdot p$, додека нејзината специфична површинска маса $r = \frac{M}{A}\left[\frac{kg}{m^2}\right]$. Материјалните моменти на инерција за кружен диск ги добиваме од равенките (8.5.18), (8.5.19) со замена на релацијата $l^2 = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} Jx_C &= \frac{M \cdot r^2}{2} \\ Jy_C &= Jzc = \frac{M \cdot r^2}{4} \end{aligned}} \qquad (8.5.20)$$

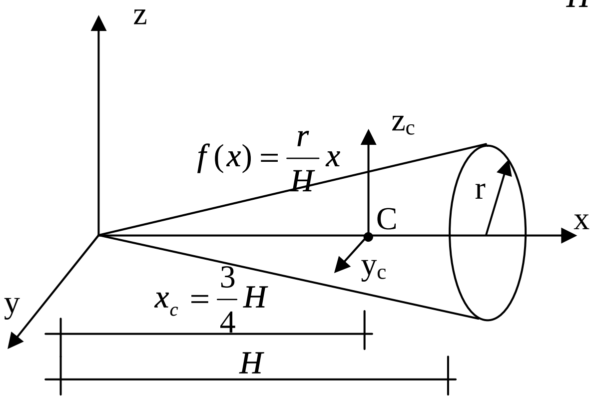
б) Ако радиусот на цилиндарот $r \to 0$, истиот преминува во кружен стап. Материјалните моменти на инерција за стапот ги добиваме со замена на релациијата $r^2 = 0$ во равенките (8.5.18), (8.5.19):

$$\boxed{Jx_C = 0}$$

$$\boxed{Jy_C = Jzc = \frac{M \cdot l^2}{12}} \qquad (8.5.21)$$

2.2) Конус

Со ротација на права со функција $f(x) = \dfrac{r}{H}x.$ околу оската x се добива конус.



Волуменот на конусот изнесува: $V = \dfrac{1}{3}r^2 pH$, додека неговата маса изнесува

$$M = r \cdot V = \frac{r \cdot r^2 pH}{3}$$

Моментот на инерција околу оската x го добиваме од равенката (8.5.16)

$$Jx = \frac{r \cdot p}{2}\int_0^H f(x)^4 \cdot dx = \frac{r \cdot p}{2}\int_0^H \left(\frac{r}{H}x\right)^4 \cdot dx = \frac{r \cdot p}{2}\frac{r^4}{H^4}\int_0^H (x)^4 \cdot dx = \frac{r \cdot p}{2}\frac{r^4}{H^4}\frac{H^5}{5}$$

$$= \frac{r \cdot p \cdot r^2 \cdot H}{10} r^2 \frac{3}{3} = \frac{3}{10}M \cdot r^2$$

$$Jxc = Jx = \frac{3}{10}M \cdot r^2$$

Моментот на инерција околу оските y і z го добиваме од равенката (8.5.17)

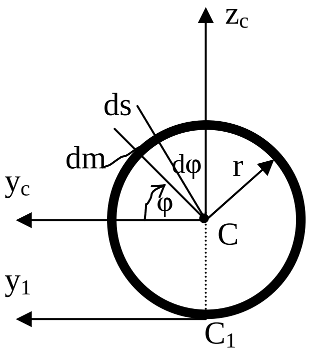
$$Jy = Jz = \frac{r \cdot p}{4}\int_0^H \left(\frac{r^4}{H^4}x^4 + 4\frac{r^2}{H^2}x^2 \cdot x^2\right) \cdot dx = \frac{r \cdot p}{4}\left(\frac{r^4}{H^4}\frac{H^5}{5} + 4\frac{r^2}{H^2}\frac{H^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{r \cdot p \cdot r^2 \cdot H}{3}\left(\frac{3 \cdot r^2}{20} + \frac{12}{20}H^2\right) = \frac{3 \cdot M}{20}\left(r^2 + 4H^2\right)$$

Моментот на инерција во однос на тежишните оски го добиваме со примена на Штајнеровата теорема за паралелни оски:

$$Jyc = Jzc = Jy - M\left(\frac{3}{4}H\right)^2 = \frac{3\cdot M}{80}\left(H^2 + 4r^2\right)$$

2.3) Кружна материјална линија



Масата на кружна материјална линија е еднаква на производот од должината и специфичната маса $M = r \cdot l$, Оттука специфична должинска маса $r = \frac{M}{l}\left[\frac{kg}{m'}\right]$.

Масата на еден елементарен дел со должина ds изнесува $dm = r \cdot ds$ Материјалните моменти на инерција околу подолжната оска x go dobivame kako proizvod od masata na elementarniot del i kvadratot na rastojanieto do oskata x. $dJxc = r^2 dm$

so integrirawe na ovaa ravenka i so nejzino razvivawe vo polarni koordinati se dobiva:

$$Jxc = \int_m r^2 dm = \int_{(l)} r^2 \cdot r \cdot ds = r\int_0^{2p} r^2 \cdot r \cdot dj \;=\; r \cdot r^3 \cdot 2p \;=\; r \cdot 2rp \cdot r^2 = M \cdot r^2$$

$$\boxed{Jxc = M \cdot r^2}$$

Моментот на инерција околу оските y и z изнесуваат:

$$\boxed{Jyc = Jzc = \frac{M \cdot r^2}{2}}$$

Моментот на инерција во однос на оската z_1 koja se nao|a na podno`jeto od materijalnata linija se добива со примена на Штајнеровата теорема за паралелни оски:

$$Jy_1 = Jyc + M \cdot r^2 = \frac{M \cdot r^2}{2} + M \cdot r^2 = \frac{3}{2}M \cdot r^2$$

GLAVA 9

DINAMIKA NA KRUTO TELO

9. ДИНАМИКА НА КРУТО ТЕЛО

9.1 ОСНОВНИ ЗАДАЧИ ВО ДИНАМИКА НА КРУТО ТЕЛО

Поимот круто тело кој се користи во динамиката претставува ограничен дел од просторот исполнет со континуално распределена маса каде растојанието помеѓу било кои точки од телото, кое е под дејство на сили, останува константно. Се работи за хомогено материјално тело, со специфична маса (густина), $r = \frac{m}{V} = const.$

Во динамика на круто тело се изучуваат две основни задачи.

Првата задача ги определува силите кои дејствуваат на крутото тело ако е дадено неговото движење.

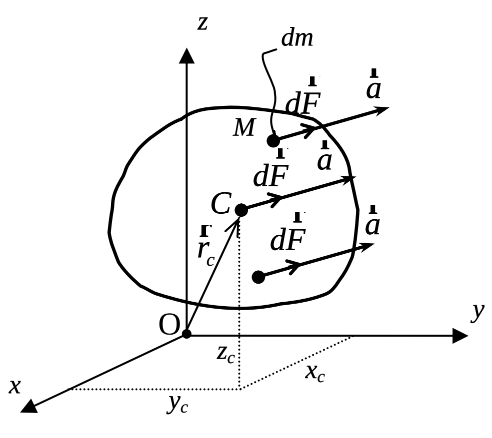
Втората задача спротивна на првата, ако се дадени силите кои дејствуваат на крутото тело и почетните услови на движењето се определува законот на движењето. Во некои случаи се одределуваат и динамички реакции на врски во колку е крутото тело поврзано со некои врски. Со примена на принципот на ослободување од врските, круто тело е под дејство на активни сили и реакции на врски.

Слободно круто тело во простор има шест степени на слобода, односно шест независни параметри на движење. Освен слободното движење постојат и ограничени движења, условени од параметрите на движењето.

Во динамиката на круто тело, посебно внимание ќе се посвети на транслаторното движење, ротацијата околу неподвижната оска Oz и компланото движење.

9.2 ДИНАМИКА НА ТРАНСЛАТОРНО ДВИЖЕЊЕ НА КРУТО ТЕЛО

Во кинематиката на транслаторно движење на круто тело се докажа дека сите точки од телото се движат на исти начин, опишуваат еднакви и паралелни траектории и имаат исти брзини и забрзувања.



Сл. 9.2.1

Во динамиката на транслаторното движење на круто тело треба да се поврзе движењето со инерцијата (масата) на телото и силите кои дејствуваат на истото. Секое круто тело содржи карактеристична точка во однос на која масата на телото е рамномерно распределена, наречена центар на масата или средините (C). Положбата на центарот на масата се определува со дадените изрази:

$$x_C = \frac{\iiint_m x dm}{m}; \qquad y_C = \frac{\iiint_m y dm}{m}; \qquad z_C = \frac{\iiint_m z dm}{m}$$

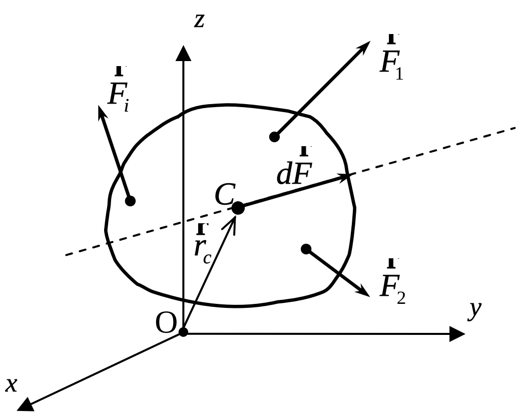
каде: x_C, y_C и z_C се компоненти на векторот: $\vec{r}_C = \dfrac{\iiint\limits_{m} \vec{r}\cdot dm}{m}$

Нека секоја точка (честица) е под дејство на елементарна сила $d\vec{F} = dm\cdot\vec{a}$. За бескрајниот број на елементарните паралелни сили може да се определи средиштето (центарот) на силите според изразот:

$$\vec{r}_S = \frac{\iiint\limits_{(m)} dF\cdot\vec{r}}{\iiint\limits_{(m)} dF} = \frac{\iiint\limits_{(m)} dm\cdot a\cdot\vec{r}}{\iiint\limits_{(m)} dm\cdot a} = \frac{a\cdot\iiint\limits_{(m)} dm\cdot\vec{r}}{a\cdot\iiint\limits_{(m)} dm} = \frac{\iiint\limits_{(m)} \vec{r}\cdot dm}{m} \tag{9.2.1}$$

каде се : $dF = dm\cdot a$, а $\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$

Центарот "S" на паралелните бескрајно мали сили кои дејствуваат во честиците се совпадна со центарот "C" на масата на крутото тело, односно $\vec{r}_S = \vec{r}_C$. Според доказот, може да се констатира дека системот на сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_i ....\vec{F}_n$ кои дејствуваат на крутото тело имаат резултанта која дејствува во центарот "C" на масата или на нападна линија која минува низ центарот на масата (Сл. 9.2.2). Со тоа е дефиниран динамичкиот услов на транслаторното движење на круто тело.



Сл. 9.2.2

Диференцијалната равенка на транслаторно движење се добива во форма:

$$m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \vec{R} \tag{9.2.2}$$

каде е: $\vec{R} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_i$

На векторската равенка (9.2.2) одговараат три скаларни диференцијални равенки:

$$m\frac{d^2 x_C}{dt^2} = R_x$$
$$m\frac{d^2 y_C}{dt^2} = R_y \tag{9.2.3}$$
$$m\frac{d^2 z_C}{dt^2} = R_z$$

каде се: $R_x = \sum_{1}^{n} F_{ix}$; $R_y = \sum_{1}^{n} F_{iy}$; $R_z = \sum_{1}^{n} F_{iz}$.

Диференцијалните равенки на транслаторното движење на крутото тело се во иста форма со диференцијалните равенки на материјалната точка. Со тоа се потврдува дека транслаторното движење на круто тело може да се определи со движењето на една точка, а тоа е центарот "C" на масата во која е сконцентрирана неговата маса.

Со диференцијалните равенки (9.2.3) се решаваат двете задачи во динамиката на круто тело. Со првата задача се определува резултантата на силите кои дејствуваат на телото во случај кога е дадено неговото движење. Втората задача, се решава со интеграција на диференцијалните равенки (9.2.3) и со користење на почетните услови на движење ($t = t_0 :\ x_C = x_{C0};\ y_C = y_{C0};\ z_C = z_{C0};\ \dot{x}_C = \dot{x}_{C0};\ \dot{y}_C = \dot{y}_{C0};\ \dot{z}_C = \dot{z}_{C0}$), при дадени сили се определува законот на движењето, преку параметрите $x_C = x_C(t);\ \ y_C = y_C(t);\ \ z_C = z_C(t)$.Транслаторното движење на круто тело има три степени на слобода.

Во динамиката на транслаторното движење се користат и основните закони во динамика на материјална точка. Законот за промена на количеството на движење при конечно поместување од почетна положба Co до крајна положба C_1, може да се напише во форма:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{J}\text{, односно:}$$

$$m \cdot \vec{V}_{C1} - m \cdot \vec{V}_{C0} = \int_{t_0}^{t} \vec{R} \cdot dt \tag{9.2.4}$$

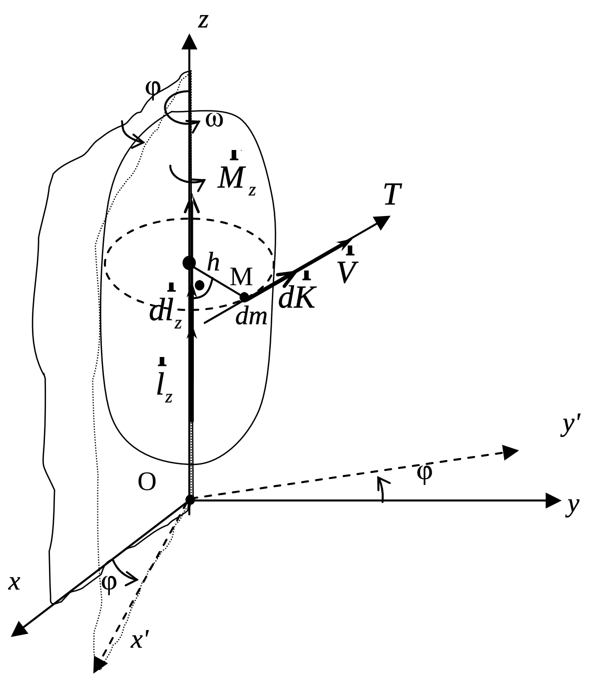
и поуниверзалниот закон, законот за промена на живата (кинетичката) енергија $T_1 - T_0 = A$, односно:

$$\frac{m \cdot V^2{}_{C1}}{2} - \frac{m \cdot V^2{}_{C0}}{2} = \int_{(C_0)}^{(C)} \left(\vec{R} \cdot d\vec{r}_C \right) \tag{9.2.5}$$

9.3 D I NAM I KA NA KRUTO TELO PR I ROTAC I JA OKOLU NEPODV I @NA OSKA Oz

Нека е дадено круто материјално тело со хомогена маса кое ротира околу неподвижната оска Oz под дејство на системот од сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots\vec{F}_i \ldots\ldots\ldots \vec{F}_n$. Тоа покажува дека дејството од системот на силите се сведува на главен момент кој се совпаѓа со моментот околу оската Oz $M_{0z}^{\vec{F}_1} = M_z \neq 0$.

Компонентите на главниот вектор на моментот $\vec{M}_0$ по однос на оските x и y и компонентите на главниот вектор на силите $\vec{R}$ по x, y и z да се еднакви на нула, односно $M_x = M_y = R_x = R_y = R_z = 0$.



Сл. 9.3.1

Според тоа, динамички услов за да едно тело ротира околу дадената неподвижна оска е моментот околу оската да е различен од нула $M_z^F \neq 0$.

Законот на ротацијата се определува со аголот $j = j(t)$, агол на ротација помеѓу неподвижната рамнина Oxz и подвижната рамнина $Ox'z$ (Сл.9.3.1). Според тоа, треба да се оформи една динамичка равенка со која ќе се поврзе ротацијата со дејството на силите и материјалноста на телото. За избрана произволна точка M со елементарна маса dm и брзина $\vec{V}$ се дефинираат динамичките карактеристики: количество на движење $d\vec{K}$ и кинетички момент $d\vec{l}_z$, односно:

$$d\vec{K} = dm \cdot \vec{V} = dm \cdot V \cdot \vec{T} = dm \cdot w \cdot h \cdot \vec{T} = w \cdot h \cdot dm \cdot \vec{T} = dK \cdot \vec{T} \qquad (9.3.1)$$

$$d\vec{l}_z = dl_z \cdot \vec{K} = dK \cdot h \cdot \vec{K} = w \cdot h^2 \cdot dm \cdot \vec{K} \qquad (9.3.2)$$

Интензитетот на кинетичкиот момент на материјалното тело во однос на оската z се добива преку извршената интеграција по волуменот на телото:

$$l_z = \int dl_z = \iiint_{(m)} w \cdot h^2 \cdot dm = w \cdot r \iiint_{(V)} h^2 \cdot dV = w \cdot Jz \qquad (9.3.3)$$

каде е Jz - материјален момент на инерција во однос на оската z.

Со примена на законот за промена на кинетичкиот момент во однос на оската z се добива:

$$\frac{d}{dt}(l_z) = Mz$$

$$\frac{d}{dt}(w \cdot Jz) = Mz$$

за $w = w(t)$ $Jz = const.$

$$Jz\frac{dw}{dt} = Mz \text{, или:}$$

$$Jz\frac{d^2 j}{dt^2} = Mz \tag{9.3.4}$$

Со равенката (9.3.4) е определена динамичката равенка при ротација на круто тело околу неподвижната оска z, која претставува диференцијална равенка од втор ред за чие решение се потребни почетните услови на движење за $t = t$о $j = j_0$ и $w = w_0$, во случај кога е дадена втората задача во динамика на круто тело.

Ако изразот $\frac{d^2 j}{dt^2}$ се замени со e се добива: $Jz \cdot e = Mz$, односно:

$$e = \frac{Mz}{Jz} \tag{9.3.5}$$

Следува дека, аголовото забрзување е пропорционално со моментот Mz на системот од сили, а обратно пропорционално со материјалниот момент на инерција Jz. Поголем материјален момент на инерција Jz се добива помало аглово забрзување e и обратно.

За карактеристика за инерцијата на материјалното тело кое ротира околу неподвижна оска е материјалниот момент на инерција Jz.

Ако е $Mz = \pm const$, агловото забрзување исто така е $e = \pm e_0 = const.$, и телото ќе извршува рамномерна променлива (забрзана или забавена) ротација.

За $Mz = 0$ и за $w = w_0 \neq 0$ телото ќе извршува рамномерна ротација.

Телото кое ротира околу оската Oz поседува во даден момент и кинетичка енергија $Ek = T$, чија големина се определува на следниот начин:

Елементарна честица, односно точка M со елементарна маса dm содржи кинетичка енергија $dT = \frac{dm \cdot V^2}{2}$, односно:

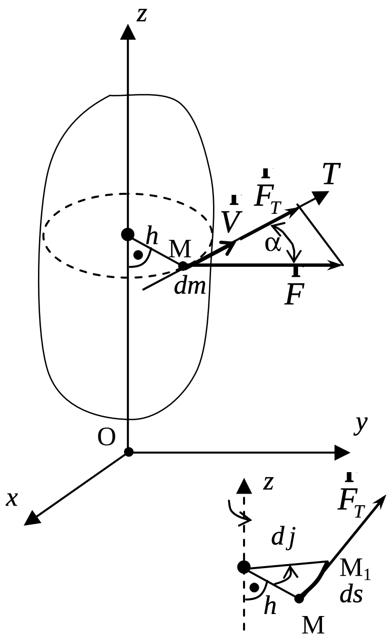
$$dT = \frac{h^2 \cdot w^2 \cdot dm}{2} \tag{9.3.6}$$

По извршената интеграција во волуменот на телото се добива:

$$dT = \frac{h^2 \cdot w^2 \cdot dm}{2} \tag{9.3.7}$$

Кинетичката енергија при ротација е определена со полупроизводот на материјалниот момент на инерција и квадратот на аглoвата брзина.

Нека точката M е под дејство на сила $\overset{\mathbf{r}}{F}$ која со тангентата на траекторијата заклопува агол a (Сл.9.3.2). Во случај на елементарно завртување dj во даден момент, нападната точка на силата се поместува и силата $\overset{\mathbf{r}}{F}$ извршува елементарна работа dA, која се определува на следниот начин:



Сл. 9.3.2

$$dA=\left(\overset{\mathbf{r}}{F},d\overset{\mathbf{r}}{r}\right)=F\cdot ds\cdot\cos a=F_T\cdot ds=F_T\cdot h\cdot dj\ ,$$

или:

$$dA=M_z^{\overset{\mathbf{r}}{F}}\cdot dj \tag{9.3.8}$$

Елементарната работа при ротација на круто тело околу неподвижна оска се определува од производот на моментот од силите во однос на оската на ротацијата $Oz = z$ и аголот на елементарното завртување dj .

Извршената работа на силите при конечно завртување од положба $j=j_0$ до крајна положба j се добива во форма:

$$A=\int dA=\int_{j_0}^{j}M_z^{\overset{\mathbf{r}}{F}}\cdot dj \tag{9.3.9}$$

Законот за промена на кинетичката енергија при ротација во диференцијална форма се определува преку диференцирање на кинетичката енергија по времето t:

$$T=\frac{Jz\cdot w^2}{2}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{Jz}{2}\cdot 2w\cdot\frac{dw}{dt}$$

$$dT=Jz\cdot\frac{dw}{dt}\cdot\frac{dj}{dt}dt$$

$$dT=Jz\cdot e\cdot dj$$

$$dT=M_z^F\cdot dj$$

$$\boxed{dT=dA} \tag{9.3.10}$$

Елементарниот прираст на кинетичката енергија е еднаков на елементарната работа на силите која е определена од производот на моментот од силите во однос на оската на ротација Oz и елементарно завртување за агол dj .

Во интегрална форма законот за прираст (промена) на кинетичката енергија при ротација околу неподвижната оска е:

$$\int_{T_0}^{T}dT=\int_{j_0}^{j}M_z^{\overset{\mathbf{r}}{F}}\cdot dj$$

$$T - T_0 = \int_{j_0}^{j} M_z^{\vec{F}} \cdot dj$$

$$\frac{Jz \cdot w^2}{2} - \frac{Jz \cdot w_0^{\,2}}{2} = \int_{j_0}^{j} M_z^{F} \cdot dj \qquad (9.3.11)$$

Ako dinami~ka ravenka pri rotacija se pomno`i so elementarniot prirast na vremeto i se izvr{i integracija se dobiva zakon za promena na kineti~kiot moment vo odnos na oskata na rotacija:

$$\frac{Jz \cdot dw}{dt} = M_z^{\vec{F}} \qquad / dt$$

$$Jz \cdot dw = M_z^{\vec{F}} \cdot dt$$

$$Jz \cdot \int_{w_0}^{w} dw = \int_{t_0}^{t} M_z^{\vec{F}} \cdot dt$$

или:

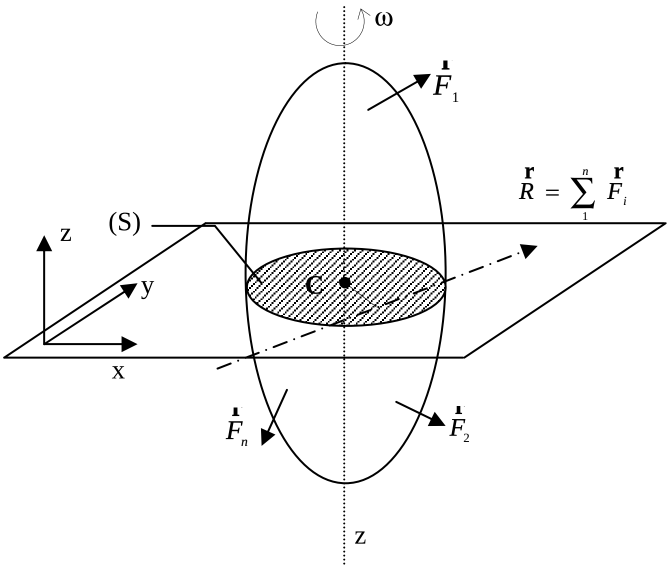
$$Jz \cdot w - Jz \cdot w_0 = \int_{t_0}^{t} M_z^{\vec{F}} \cdot dt$$

$$l_z - l_{0z} = \int_{t_0}^{t} M_z^{\vec{F}} \cdot dt \qquad (9.3.12)$$

Promenata (prirastot) na kineti~kiot moment vo odnos na oskata na rotacija e ednakov na impulsot od momentot na silite vo odnos na istata oska

9.4. DINAMIKA NA KOMPLANO DVI@EWE

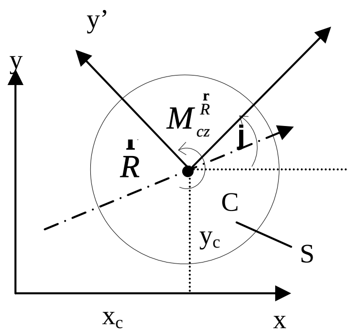
Vo kinematikata na komlanoto dvi`ewe na kruto telo se doka`a deka komplanoto dvi`ewe na kruto telo se zamenuva so komplano dvi`ewe na ramninska figura (Y) koja se dvi`i vo sopstvenata ramnina. So trite paramametri, kordinatite na polot na rotacija $x_A=x_A(t)$; $y_A=y_A(t)$; i agolot na rotacija na podvi`niot triedar ozna~en so $\varphi=\varphi(t)$ napolno se opredeluva zakonot za komplano dvi`ewe (Sl.9.4.1).



Sl.9.4.1

Vo dinamikata na komplanoto dvi`ewe se voveduva materijalnost na teloto i dejstvoto na silite. Ako kruto telo so masa m e pod dejstvo na sistem od sili $\vec{F}_1,\vec{F}_2....\vec{F}_n$, se dvi`i vo prostor paralelno na ramninata Oxy, stanuva zbor za komplano dvi`ewe. Vo toj slu~aj masata na teloto e ramnomerna rasporedena vo odnos na ramninata na dvi`eweto odnosno ramninskata figura (Y) so centarot S na masata }e le`i vo ramninata na dvi`eweto. Isto taka i rezultantata na silite $\vec{R}=\sum_1^n \vec{F}_i$, le`i vo ramninata na dvi`eweto na ramninskata figura (Sl. 9.4.1) so toa se definirani dvata dinami~ki uslovi na komplanoto dvi`ewe.

Vo dinamikata na komplanoto dvi`ewe centarot na masata S se usvojuva za pol na rotacija, to~ka niz koja pominuva zamislena oska na rotacija Cz koja e normalna na ramninata na dvi`eweto (Sl.9.4.1). Sistemot na sili ~ija rezultanta le`i vo ramninata na dvi`eweto se reducira vo odnos na centarot S na masata vo sila $\vec{R}$ ~ija napadna linija minuva niz centarot i moment na rotacija $M_{cz}^{\vec{R}}$ od (Sl 9.4.2).



Sl. 9.4.2

Vo ovoj slu~aj komplanoto dvi`ewe na ramna figura se dobiva od zbirot na translatornoto dvi`ewe pod dejstvo na rezultantata $\vec{R}$ na silite i rotacionoto dvi`ewe oklu oskata Cz pod dejstvo na momentot od silite $M_{cz}^{\vec{R}}$.

Dinami~kite ravenki na komplanoto dvi`ewe na ramna figura se dobivaat vo sledna forma:

$$m\frac{d^2x_c}{dt^2}=R_x$$
$$m\frac{d^2y_c}{dt^2}=R_y \qquad (9.4.1)$$
$$J_{cz}\frac{d^2j}{dt^2}=M_{cz}^{\vec{R}}$$

Trite dinami~ki ravenki se diferencijalni od vtor red za ~ie re{enie potrebni se po~etni uslovi na dvi`eweto odnosno za t=t$_0$ $x_C=x_{C0}$; $y_C=y_{C0}$; $\varphi=\varphi_0$; $\dot{x}_c=\dot{x}_{c0};\dot{y}_c=\dot{y}_{c0};w=w_0$.

Integralite na diferencijalnite ravenki zaedno so po~etnite uslovi na dvi`ewe }e go opredelat zakonot na komplanoto dvi`ewe so ravenkite: $x_C=x_C(t)$; $y_C=y_C(t)$; $\varphi=\varphi(\tau)$. So toa e re{ena vtorata zada~a od dinamikata na komplanoto dvi`ewe na kruto telo.

Mnogubrojni zada~i vo dinamikata na komplanoto dvi`ewe se re{avaat so primena na zakonot za promena na kineti~kata energija.

Kineti~kata energija pri komplanoto dvi`ewe na kruto telo se opredeluva od zbirot na kineti~kata na translatornoto dvi`ewe i kineti~kata energija od rotacijata okolu rotacionata oska Cz:

$$T=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}J_{cz}w^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}J_{cz}\dot{j}^2 \qquad (9.4.2)$$

Ako e definirana polo`bata na momentalniot pol na rotacija “P” $(\vec{V}_p=0)$, kineti~kata energija se dobiva preku rotacijata okolu momentalniot pol odnosno :

$$T=\frac{1}{2}J_{pz}w^2 \qquad (9.4.3)$$

Dokaz: Ako to~kata P se usvoi za pol na rotacija, materijalniot moment na inercija : $J_{pz}=J_{cz}+m\overline{CP}^2$

So zamena na materijalniot moment na inercija J_{PZ} vo ravenka (9.4.3) se dobiva:

$$T=\frac{1}{2}(J_{cz}+m\overline{CP}^2)\cdot w^2=\frac{1}{2}J_{cz}\cdot w^2+\frac{m}{2}(\overline{CP}w)^2=\frac{1}{2}J_{cz}\cdot w^2+\frac{1}{2}mV_c^2$$

Zakonot za promena na kineti~ka energija vo diferencijalna forma se opredeluva so diferencirawe po vremeto na izrzot (9.4.2) odnosno:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{2}m(2\dot{x}_c\ddot{x}_c+2\dot{y}_c\ddot{y}_c)+\frac{1}{2}J_{cz}2\dot{j}\ddot{j}$$

za: $m\ddot{x}_c=R_x, m\ddot{y}_c=R_y, J_{cz}\ddot{j}=M_{cz}$ se dobiva:

$$\frac{dT}{dt}=R_x\frac{dx_c}{dt}+R_y\frac{dy_c}{dt}+M_{cz}\frac{dj}{dt}$$

odnosno:

$$dT = (\vec{R}, d\vec{r}_c) + M_{cz} dj$$
$$dT = dA^{\vec{R}} + dA^{M_{cz}} \qquad (9.4.4)$$

So ravenkite (9.4.4) e definiran zakonot za promena na kineti~ka energija pri komplanoto dvi`ewe vo diferencijalna forma koja glasi: **Elementarniot prirast na kineti~kata energija e rezultat od zbirot na elementarnata rabota na rezultantata od silite koi dejstvuvaat i elementarnata rabota od momentot na istite vo odnos na oskata na rotacija.**

Vo integralna forma pri kone~no pomestuvawe i kone~na rotacija, zakonot za promena na kineti~kata energija se dobiva so izrazot :

$$T_1 - T_0 = A^{\vec{R}} + A^{M_{cz}} \qquad (9.4.5)$$

Kineti~kata energija vo po~etniot i krajniot moment na dvi`ewe se opredeluva spored izrazot (9.4.2), a rabotata na rezultantata na silite pri kone~no pomestuvawe na centarot S i rabotata na momentot na silite vo odnos na rotacionata oska Cz pri kone~no zavrtuvawe vo istiot vremenski interval, se dobiva so izrazite:

$$A^R = \int_{(C_0)}^{(C_1)} dA^R = \int_{(C_0)}^{(C_1)} (\vec{R}, d\vec{r}_c) = \int_{(C_0)}^{(C_1)} R_x dr_{cx} + R_y dr_{cy} \qquad (9.4.6)$$

$$A^M = \int_{j_0}^{j_1} dA^{M_{cz}} = \int_{j_0}^{j_1} M_{cz} dj \qquad (9.4.7)$$

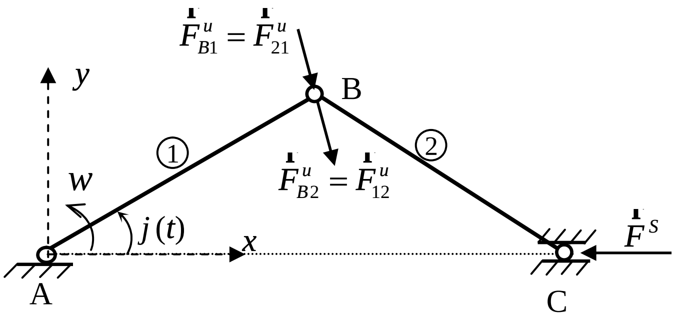
GLAVA 10

DINAMIKA NA MATERIJALNI SISTEMI. PRINCIPI VO DINAMIKA NA MATERIJALNI SISTEMI

10.1 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ НА ДВИЖЕЊЕ НА МАТЕРИЈАЛЕН СИСТЕМ

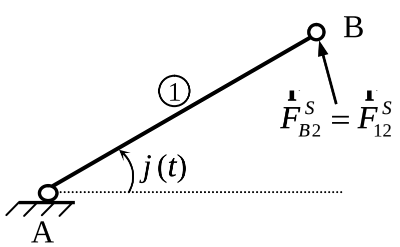
Материјален систем претставува збир од материјални тела или материјални точки кои се заемно поврзани со помош на врски така да движењето на секое тело или точка е зависно од движењето на останатите тела или точки од системот. Во динамиката на материјални системи треба да се изучи движењето како резултат од дејството на останатите тела или точки кои не се составен дел на системот. Дејството од овие тела (точки) се изразува преку сили, кои се наречени надворешни сили $\vec{F}_i^S$. Надворешните сили можат да бидат активни $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V})$ и реакции на врски (добиени со користење на принципот на ослободување од врски). Истите ќе влијаат врз движењето на материјалниот систем. Но, освен надворешните сили, материјалниот систем е под дејство и на внатрешни сили $\vec{F}_i^U$ кои се последица на взаемното дејство помеѓу телата и точките на материјалниот систем (III Њутнов закон).

Пример, клипниот механизам A,B,C кој се движи комплано е под дејство на хоризонтална сила $\vec{F}^S$ во точката C и истата придонесува за промената на неговата положба (Сл.10.1.1). Хоризонталното поместување на точката C, ќе овозможи материјалниот стап $\overline{AB}$ да врши ротација околу оска која минува во неподвижната потпора A, а материјалниот стап $\overline{BC}$ да се движи комплано во рамнината Oxy.



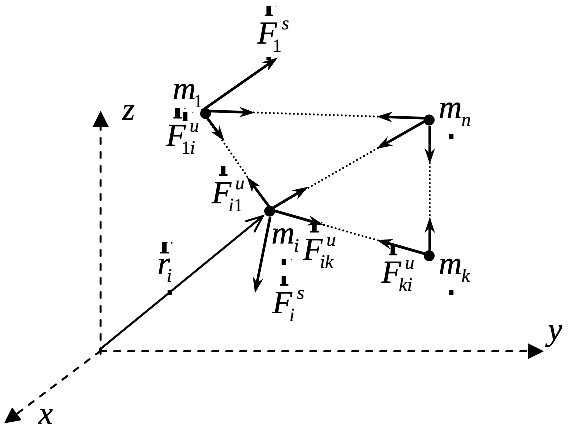
Сл.10.1.1

Материјалниот систем ABC, кој е оформен од крути материјални стапови взаемно поврзани со зглоб, неподвижна потпора A и лизгач во C содржи и внатрешни сили $\vec{F}_i^U$, тоа се две еднакви и спротивни сили кои дејствуваат помеѓу телата од системот. На пример, помеѓу двата стапа во зглобот (Сл.10.1.1) каде е $\vec{F}_{B2}^U = -\vec{F}_{B1}^U$ или $\vec{F}_{12}^U = -\vec{F}_{21}^U$. Со $\vec{F}_{12}^U$ е означен притисокот на стап (1) од дејството на стапот (2) и спротивно со $\vec{F}_{21}^U$ притисокот на стапот (2) од стап (1). Може да се заклучи дека внатрешните сили секогаш се појавуваат во парен број и взаемно се поништуваат. Нека материјалениот систем A,B,C се раздвои во B на два дела и нека се разгледа остатокот AB (Сл.10.1.2). Влијанието од стапот (2) врз (1) се пренесува преку силата $\vec{F}_{12}$ која станува надворешна и активна сила на стапот (1), односно $\vec{F}_{B2} = \vec{F}_{12}^S$.



Сл.10.1.2

Поделбата на силите на внатрешни и надворешни е условена во зависност од припадноста на поедините тела на материјалниот систем.



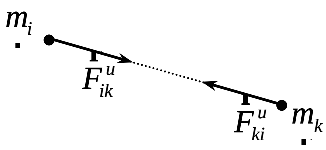
Сл.10.1.3

Нека е даден систем од n материјални точки со маси $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ и нека секоја точка е под дејство на резултанта од надворешни сили $\vec{F}_i^S$. Взаемното поврзување помеѓу поедините материјални точки е овозможено од дејство на внатрешните сили (Сл.10.1.3).

Внатрешните сили помеѓу две избрани точки mi и mk се еднакви по интензитет и правец, а спротивни по насока, односно:

$$\vec{F}_{iK}^U = -\vec{F}_{Ki}^U \tag{10.1.1}$$

каде е $\vec{F}_{iK}^U$ сила преку која е изразено дејството на точката mi од точката mk, и спротивно со $\vec{F}_{Ki}^U$ е изразено дејството на точката mk од точката mi (Сл.10.1.4).



Сл.10.1.4

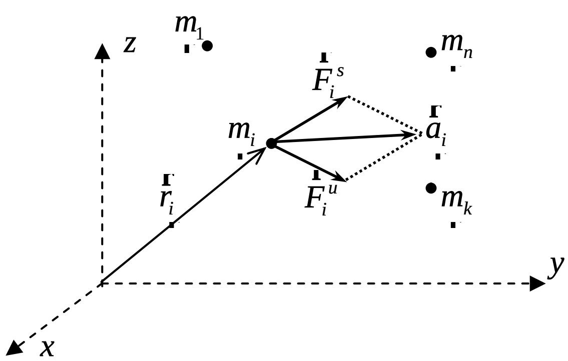
Од взаемното еднакво дејствување на поедините точки од системот може да се заклучи дека внатрешните сили се појавуваат во парен број и за вкупниот систем векторскиот (геометриски) збир е еднаков на нула односно:

$$\sum_1^n \vec{F}_{iK}^u = \vec{R}^u = 0 \tag{10.1.2}$$

Ако равенката (10.1.2) се помножи векторски со векторот на положбата $\vec{r}_i$, се добива следнава векторска равенка:

$$\sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{iK}^u\right] = \sum_1^n \vec{M}_{0i}^u = 0 \tag{10.1.3}$$

Со равенката (10.1.3) се докажа дека влијанието од моментите на внатрешните сили на материјалниот систем во однос на координатниот почеток полот O, а во однос на било кој избран пол секогаш е еднакво на нула.



Сл.10.1.5

Диференцијалните равенки на движење на поедините точки од системот (користејќи го принципот на ослободување) се добиваат според Вториот Њутнов закон (Сл.10.1.5).

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^u \quad (i = 1,2,3.....n) \tag{10.1.4}$$

каде се: $\vec{a}_i = \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$ - вектор на забрзувањето, $\vec{F}_i^S$ - резултанта од надворешни сили, и $\vec{F}_i^u$ - резултанта од внатрешни сили.

Со извршено проектирање на равенката (10.1.4) во однос на координатниот систем Oxyz се добиваат следните диференцијални равенки:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{ix}{}^S + F_{ix}{}^u$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{iy}{}^S + F_{iy}{}^u \qquad (i = 1,2,3.....n) \qquad (10.1.5)$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{iz}{}^S + F_{iz}{}^u$$

Со почетните услови на движењето на материјалните точки од системот и по извршената интеграција на трите диференцијални равенки наполно се определува движењето на материјалниот систем. Но трите координати на материјалниот систем се потчинети на равенки на врски чии број изнесува s. Според тоа, равенките на врски можат да се изразат во следнава форма:

$$f_j(x_1, y_1, z_1,.......x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (j = 1,2,3.....s) \qquad (10.1.6)$$

Следува дека *"s"* координати се зависни од *(3n-s)* координати кои остануваат како независни и нивниот број е k, односно:

$$k = 3n - s \qquad (10.1.7)$$

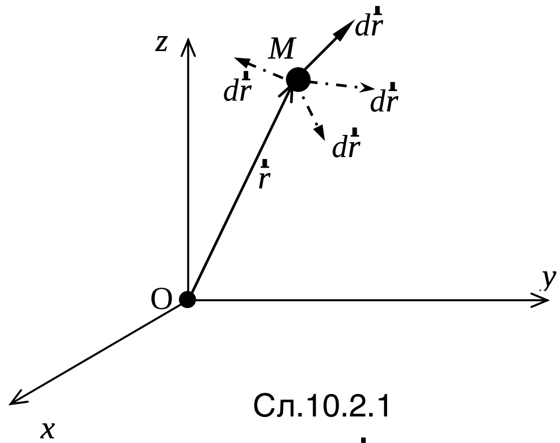
Со бројот *"k"* се одредува степенот на слобода на материјалниот систем.

Во динамика на материјални системи се среќаваат повеќе видови на материјални врски. Видовите на врски кои се користат во динамиката на материјална точка, ќе се користат и во динамиката на материјални системи.

При интеграцијата на диференцијалните равенки и вклучувањето на влијанието на врските на кои е потчинет материјалниот систем, се наидува на проблеми од математички карактер. Затоа во динамиката на материјални системи се оформуваат општи (заеднички) равенки на движење на материјалните системи кои произлегуваат од општите закони во динамиката во кои се содржани збирните динамички карактеристики на системот.

10. 2 ВИРТУЕЛНО ОВОЗМОЖЕНО ПОМЕСТУВАЊЕ НА МАТЕРИЈАЛЕН СИСТЕМ

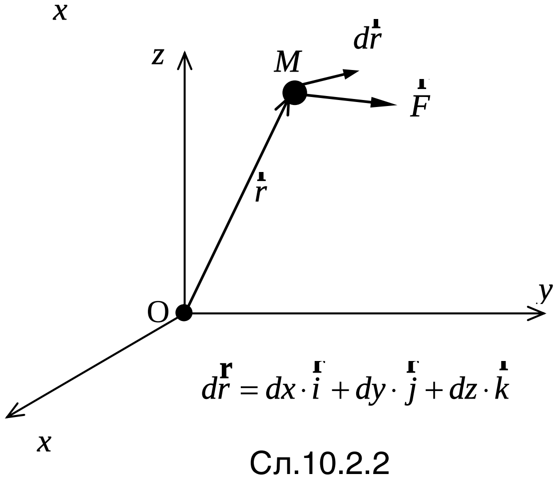
Под виртуелно овозможено поместување на материјален систем се подразбира секое замислено бесконечно мало поместување на неговите точки кои во дадена положба (даден момент на време) го дозволуваат врските на кој е изложен истот. Со виртуелното поместување не треба да биде променета дадената положба на материјалниот систем.



Сл.10.2.1

Слободна точка во простор има бескрајно многу виртуелни овозможени поместувања без да биде променета нејзината положба (Сл.10.2.1). Ако со $d\vec r$ се означи нејзиното виртуелно поместување, тогаш елементарните проекции на овој вектор во Декартовиот координатен систем се dx, dy, dz, односно:

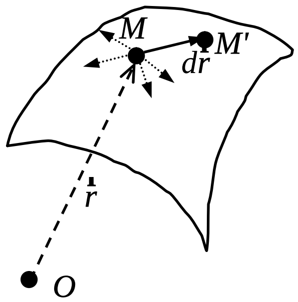
$$d\vec r = dx\cdot\vec i + dy\cdot\vec j + dz\cdot\vec k \qquad (10.2.1)$$



Сл.10.2.2

Ако точката M е под дејство на сила $\vec F$ вистинското елементарно поместување во дадена положба $d\vec r$ ќе се совпадне со едно од бесконечните виртуелни поместувања (Сл.10.2.2).

Виртуелните поместувања не зависат од дејството на силите, а зависат од врските на кои е изложена материјалната точка. На пример, неслободна материјална точка која е принудена да се дивжи по стационарна холономна врска $f(x,y,z) = 0$, за нејзино виртуелно овозможено поместување $d\vec r$ може да се усвои секое бесконечно мало поместување во околината на положбата на точката M без да ја наруши, односно напушти површината (Сл.10.2.3)



Сл.10.2.3

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec r = dx\cdot\vec i + dy\cdot\vec j + dz\cdot\vec k$$

Точката M' мора да остане на површината, и нејзините координати треба да ја задоволат равенката на врска:

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) = 0 \qquad (10.2.2)$$

Ако равенката се развие по Тајлоров ред и се исклучат членовите од втор и повисок ред, како незначителни, се добива:

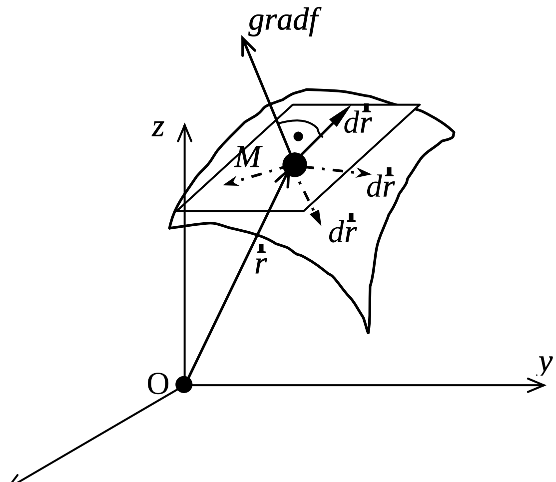
$$f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0 \qquad (10.2.3)$$

за $f(x,y,z) = 0$, следува дека:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=df=df=0 \qquad (10.2.4)$$

Од равенството (10.2.4) може да се заклучи дека тоталниот диференцијал на функцијата $f(x,y,z)$ е еднаков на нула односно $df = df = 0$.

Ако тоталниот диференцијал на равенката на врска е еднаков на нула, тогаш елементарните прирасти на координатите dx, dy и dz се наречени варијации. Според тоа, варијациите се компоненти на вирутелно елементарно поместување $d\vec{r}$ кое е различно од вистинското елементарно поместување $d\vec{r}$.



Сл.10.2.4

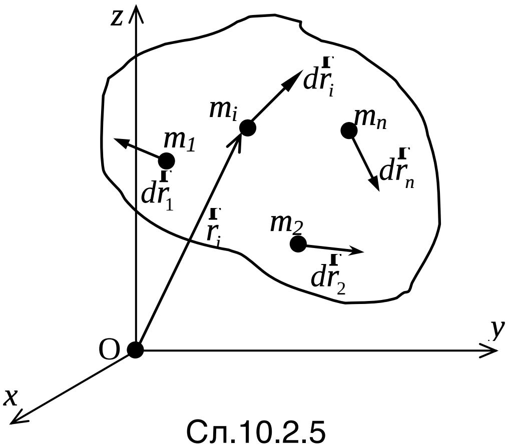
Равенката (10.2.4) може да се напише во следна форма:

$$\left(gradf, d\vec{r}\right)=0 \qquad (10.2.5)$$

Следува дека виртуелното овозможено елементарно поместување од врската на која е потчинета материјалната точка неопходно е да биде нормално на градентот на површината и да лежи во тангенцијалната површина во точка M (Сл.10.2.4).

Овозможените поместувања од врската секогаш се виртуелни и елементарни (бескрајно мали) за да материјалната точка не ја напушти врската.

Со воведување на овозможените поместувања ефектот од врската е геометриски, односно кинематички.



Сл.10.2.5

Нека е даден материјален систем од n материјални точки $\left(m_{1,}m_2,...m_i,....m_n\right)$ кои се потчинети на s стационарни холономни врски (Сл.10.2.5) чии равенки се:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1,y_1,z_1,...x_i,y_i,z_i,...x_n,y_n,z_n)=0\\
&f_1(x_1,y_1,z_1,...x_i,y_i,z_i,...x_n,y_n,z_n)=0\\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (10.2.6)\\
&.\\
&f_s(x_1,y_1,z_1,...x_i,y_i,z_i,...x_n,y_n,z_n)=0
\end{aligned}$$

Врските помеѓу компонентите на виртуелните поместувања (варијациите) на системот ќе произлезат од условите за "s"-те тотални диференцијали на дадените равенки на врски да бидат еднакви на нула, односно:

$$\partial f_1 = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}dz_1 + \dots\dots\dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}dy_n + \frac{\partial f_1}{\partial z_n}dz_n) = 0$$

$$\partial f_2 = (\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1}dz_1 + \dots\dots\dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_2}{\partial y_n}dy_n + \frac{\partial f_2}{\partial z_n}dz_n) = 0$$

$$. \qquad (10.2.7)$$

$$.$$

$$\partial f_s = (\frac{\partial f_s}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_s}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_s}{\partial z_1}dz_1 + \dots\dots\dots \frac{\partial f_s}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_s}{\partial y_n}dy_n + \frac{\partial f_s}{\partial z_n}dz_n) = 0$$

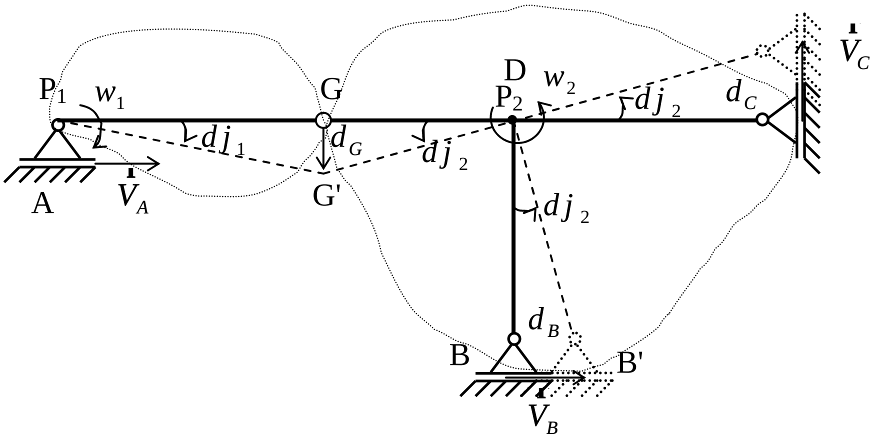
Секое овозможено поместување на точките на системот е определено по аналитички пат со варијациите dx_i, dy_i и dz_i (i = 1,2,.....n) кои ги задоволуваат "s"-те равенки. Следува дека *"k"* варијации остануваат независни и можат да се усвојат за произволни и различни од нула, каде $k = 3n - s$.

"S"-те варијации се зависни од "k"-те независни варијации и се определуваат од равенките (10.2.7).

Материјален систем со k степени на слобода, содржи "к" независни виртуелни поместувања (варијации), кои се различни од нула, односно $\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 \neq 0$; ....;$\delta_k \neq 0$.

За определување на виртуелните поместувања на материјален систем, а особено за линиски материјални системи (механизми со еден степен слобода) се користат поимовите виртуелни брзини на поеидините точки од механизмот. Со помошта на моменталните полови на виртуелните брзини на поедините крути плочи се определуваат геометриските зависности помеѓу виртуелните помесутвања. За системи со еден степен на слобода, постои само едно независно вирутелно поместување $\delta_1 \neq 0$, а останатите се определуваат по геометриски пат во зависност од δ_1.

Пример: За дадената положба на механизмот да се определат виртуелните поместувања.



Виртуелните брзини на карактеристичните точки се:

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}; \vec{V}_B = \frac{d\vec{B}}{dt};$$

$$\vec{V}_C = \frac{d\vec{C}}{dt}; \vec{V}_G = \frac{d\vec{G}}{dt};$$

Интензитетите се:

$$V_A = \frac{d_A}{dt}; V_B = \frac{d_B}{dt}; V_C = \frac{d_C}{dt}; V_G = \frac{d_G}{dt};$$

Нека за независно виртуелно бескрајно мало завртување се усвои:

$$dj_1 = dj \neq 0 \quad (w_1 \neq 0).$$

За дадената положба на системот се добива виртуелна овозможената положба: $\overline{AG'}, \overline{G'P_2}, \overline{P_2B'}$ и $\overline{P_2C'}$ со која не е нарушена (променета) дадената положба $\overline{AG}, \overline{GD}, \overline{DB}$ и $\overline{DC}$.

Виртуелните поместувања на карактеристичните точки се:

$$d_B = dj_2 \cdot \overline{P_2B},\ d_C = dj_2 \cdot \overline{P_2B},\ d_G = dj_1 \cdot \overline{P_1G} = dj \cdot \overline{P_1G}$$

Од взаемното поместување на дисковите 1 и 2 се добива dj_2:

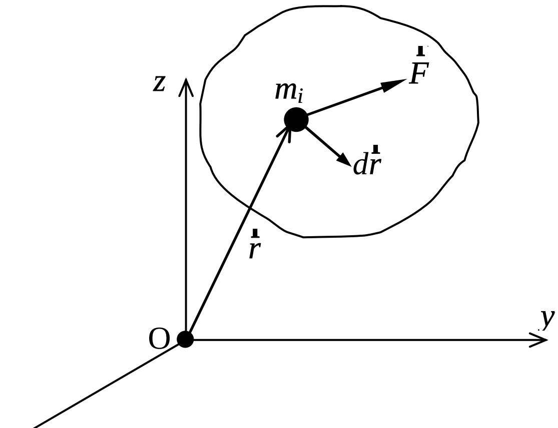
$\overline{GG'} = d_G = dj_1 \cdot \overline{P_1G} = dj_2 \cdot \overline{P_2G}$, следува:

$$\boxed{dj_2 = \frac{\overline{P_1G}}{\overline{P_2G}} dj_1}$$

10. 3 ВИРТУЕЛНА РАБОТА. ИДЕАЛНИ ВРСКИ

Виртуелна работа е работата на сила добиена при виртуелното овозможено елементарно поместување на нејзината нападна точка. Се работи за елементарна работа, означена со dA, и определена по аналогија на дефиницијата за елементарна работа на сила, односно:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \tag{10.3.1}$$



Сл.10.3.1

Во Декартовиот координатен систем равенката (10.3.1) може да се изрази во следна форма:

$$dA = Fx \cdot dx + Fy \cdot dy + Fz \cdot dz \tag{10.3.2}$$

За точки од материјалниот систем кои се изложени на виртуелни овозможени поместувања, виртуелната работа на силите кои дејствуваат врз системот се добива со сумата на виртуелните работи на поедините сили, (Сл.10.3.1), односно:

$$\sum_1^n dA_i = \sum_1^n \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \sum_1^n \left(F_i x \cdot d_{ix} + F_i y \cdot d_{iy} + F_i z \cdot d_{iz}\right) \tag{10.3.3}$$

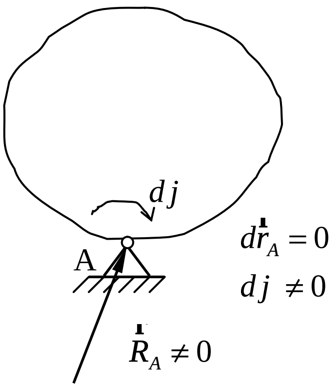
Ефектот од врските на материјалниот систем се манифестира врз забрзувањето на поедините точки од системот, како резултат од реакциите на врските кои можат да бидат идеални или реални.

Идеални врски се дефинираат со помошта на виртуелната работа на реакциите на врските. За идеална врска се усвојува врската кај која е задоволен условот виртуелната работа на реакцијата на врската при виртуелно овозможено поместување на нејзината нападна точКа да е еднаквио на нула, односно:

$$dA = \left(\vec{F}_W, d\vec{r}_W\right) = 0 \tag{10.3.4}$$

За идеални врски кои се користат во динамиката на материјалните системи можат да се наведат следниве:

Крута плоча (диск) потпрен во точката A на неподвижен зглоб (Сл.10.3.2).

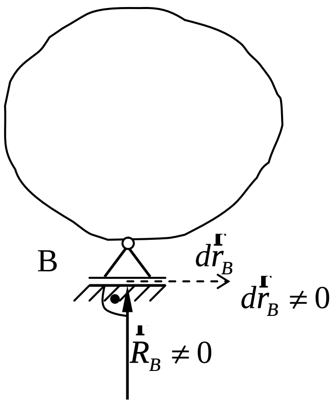


Сл.10.3.2

Виртуелното овозможено поместување на точката A е $dr_A = 0$. Следува дека и виртуелната работа $dA = 0$, односно:

$$dA = \left(\vec{R}_A, d\vec{r}_A\right) = R_A \cdot dr_A \cdot \cos\alpha_A = 0 \tag{10.3.5}$$

Крута плоча (диск) потпрен во точката B на подвижна потпора (лежиште) (Сл.10.2.3).

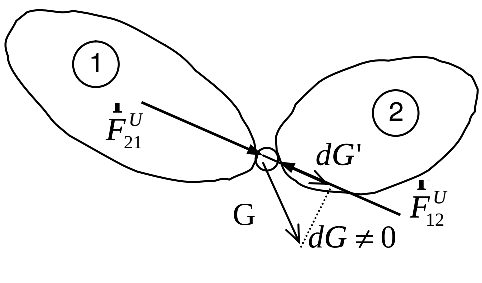


Сл.10.3.3

Виртуелното овозможено поместување е $d\vec{r}_B$ е ортогонално со реакцијата на врската R_B. Следува дека и виртуелната работа на реакцијата на врска $dA = 0$ (Сл.10.3.3).

$$dA = \left(\vec{R}_B, d\vec{r}_B\right) = R_B \cdot dr_B \cdot \cos 90° = 0 \tag{10.3.6}$$

Подвижен зглоб кој поврзува две крути плочи 1 и 2.



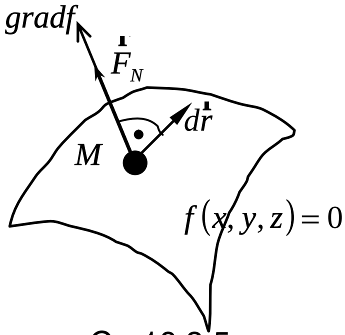
Сл.10.3.4

Во зглобот "G" заемното дејство од дватадиска, (според третиот Њутнов закон) е определено со две спротивни и еднакви сили $\vec{F}_{12}^U = -\vec{F}_{21}^U$. Ако зглобот G виртуелно се помести, работата на внатрешните сили:

$$dA = \left(\vec{F}_{12}^U, d\vec{r}_G\right) + \left(\vec{F}_{21}^U, d\vec{r}_G\right) = F_{12} \cdot d_{G'} - F_{21} \cdot d_{G'} = 0 \tag{10.3.7}$$

Материјална точка која лежи на идеална

холономна стационарна површина *f(x,y,z)* = 0

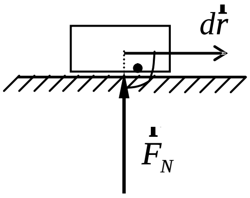


Сл.10.3.5

Reakcijata na vrskata $\vec R = \vec F_N$ e kolinearna so $gradf$, virtuelnoto ovozmo`eno pomestuvawe $d\vec r$ e ortogonalno na $\vec R$. Virtuelnata rabota e:

$$dA = \left(\vec F_N, d\vec r\right) = 0 \qquad (10.3.8)$$

Лизгање на тело по глатка рамнина

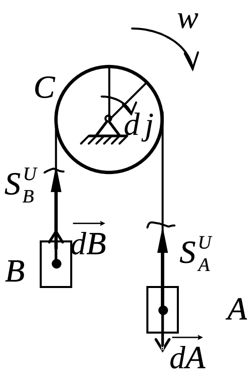


Сл.10.3.6

Реакцијата на врската односно од рамнината $\vec F_N$ е нормална на поместувањето, односно на овозможеното виртуелно поместување (поместување во даден момент), односно: $\vec F_N \perp d\vec r$

$$dA = \left(\vec F_N, d\vec r\right) = 0 \qquad (10.3.9)$$

Нерастегливо јаже обвиено околу макара C

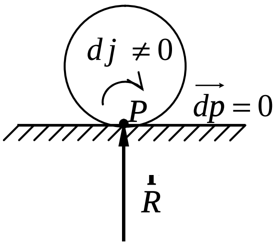


Сл.10.3.7

Виртуелното овозможено поместување на телото A, ќе се пренесе на телото B, односно $dA = dB$.
Виртуелната работа на силата во јажето:

$$dA = \left(\vec S_A^U, \overrightarrow{d_A}\right) + \left(\vec S_B^U, \overrightarrow{d_B}\right) = -S_A^U \cdot d_A + S_B^U \cdot d_B = 0 \qquad (10.3.10)$$

Тркалање на кружен диск без лизгање по рамнина



Сл.10.3.8

Во допирот на дискот и рамнината се наоѓа моментален пол на брзината P $\left(\vec V_P = 0\right)$. Следува дека виртуелното овозможено поместување $\overrightarrow{d_P} = 0$, виртуелното овозможено завртување $dj \neq 0$. Виртуелната работа:

$$dA = \left(\vec R, \overrightarrow{d_P}\right) = 0 \qquad (10.3.11)$$

10.4 ЛАГРАНЖОВ ПРИНЦИП. ДАЛАМБЕР-ЛАГРАНЖОВ ПРИНЦИП

Материјален систем кој е изложен на идеални врски во дадена положба ќе остане во рамнотежа (статичка или динамичка) ако е сумата од елементарните работи на сите сили (нападни или нападни и инерцијални) при секое овозможено виртуелно поместување на материјален систем во дадената положба, еднаква на нула, т.е.:

$$\sum_{1}^{n} dA_i = \sum_{1}^{n} \left(\vec{F}_i^S, d\vec{r}_i\right) = 0 \qquad (10.4.1)$$

$$\sum_{1}^{n} dA_i = \sum_{1}^{n} \left(\vec{F}_i^S, d\vec{r}_i\right) + \sum_{1}^{n} \left(\vec{F}_{ij}, d\vec{r}_i\right) = 0 \qquad (10.4.2)$$

Со равенката (10.4.1) е дефиниран Лагранжовиот принцип кој се користи во статиката, и гласи: Збирот од елементарните работи на сите нападни сили при виртуелното овозможено поместување на материјалниот систем во дадената положба да биде еднаков на нула.

Со равенката (10.4.2) е дефиниран Даламбер - Лагранжовиот принцип.

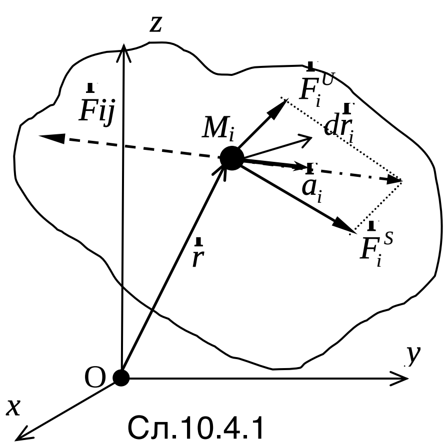
Поимовите инерцијални сили, виртуелни овозможени поместувања, идеални врски на материјалните системи го овозможиле оформувањето на овој принцип, односно практичен метод, за решавање на многубројни задачи во динамиката на материјалните системи.

Ако е системот во статичка рамнотежа и инерцијалните сили се еднакви на нула, Даламбер-Лагранжовиот принцип се сведува на Лагранжов принцип. Со примена на Лагранжовиот принцип во статиката се определуваат равенките за рамнотежа на материјалните системи.

Во случај кога материјалниот систем е во движење, со помошта на Далмбер - Лагранжовиот принцип се составуваат динамичките диференцијални равенки на движење.

Ако движењето на материјалниот систем е дефинирано преку Декартовите коорднати, равенката (10.4.2) може да се напише во следна форма:

$$\sum_{1}^{n} \left[\left(F_{ix}^S - F_{ijx}\right)dx_i + \left(F_{iy}^S - F_{ijy}\right)dy_i + \left(F_{iz}^S - F_{ijz}\right)dz_i\right] = 0 \qquad (10.4.3)$$



Сл.10.4.1

каде се: $F_{ix}^S, F_{iy}^S, F_{iz}^S$ - проекции на нападни сили

$F_{ijx}^S, F_{ijy}^S, F_{ijz}^S$ - проекции на инерцијални сили и

dx_i, dy_i, dz_i - проекции на овозможените виртуелни поместувања, односно варијации на координатите на точката во која дејствуваа нападните и инерцијалните сили (Сл.10.4.1)

Даламбер - Лагранжовиот принцип е во групата на таканаречени диференцијални принципи кои се користат за определување на диференцијалните равенки на движење на материјален систем .

Условите за рамнотежа кои се користат во статиката можат исто така да се определат од следниот аналитички израз:

$$\sum_{1}^{n}\left(F_{ix}^{S}dx_i + F_{iy}^{S}dy_i + F_{iz}^{S}dz_i\right) = 0 \qquad (10.4.4)$$

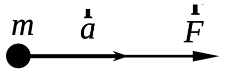
Лагранжовиот принцип ги користи поимовите виртуелни поместувања, варијации на координати и во литературата може да се сретне под насловот “Принцип на виртуелни поместувања“ или “Варијационен принцип“.

10.5 ДАЛАМБЕРОВ ПРИНЦИП

Даламберовиот принцип припаѓа во групата на таканаречените диференцијални принципи кои ни овозможуваат оформување на диференцијалните равенки на движење на материјалните системи. Во динамиката е наречен кинетостатички метод кој се користи за определување на динамичките реакции на врски. Законите кои се дефинирани во статиката преку Даламберовиот принцип се искористени и во динамиката.

- Даламберов принцип за слободна материјална точка.

Нека е дадена слободна материјална точка со маса m која се движи во просторот под дејство на сила $\vec{F}$. Точката добива забрзување $\vec{a}$ пропорционално на силата, а обратно пропорционално на масата. Силата $\vec{F}$ е ефективната сила која врши промена на движењето, по интензитет, правец и насока, а масата игра улога на инертно (спротивно) дејство, односно го намалува интензитетот на забрзувањето (Сл.10.5.1).

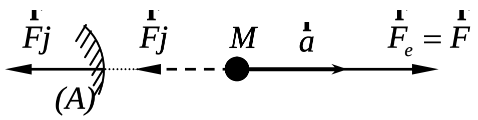


$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Сл.10.5.1

Даламбер (француски научник кој живеел и творел во периодот 1717-1783 год.) вовел поим на инерцијална сила, фиктивна сила која дејствува на материјална точка која се движи по дејство на сила $\vec{F}$. (Сл.10.5.2.).

Од II Њутнов закон $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ произлегува инерцијална сила $\vec{Fj}$:



Сл.10.5.2

$\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{F} + \vec{Fj} = 0$, односно:

$$\vec{Fj} = -m \cdot \vec{a} \tag{10.5.1}$$

Од равенката (10.5.1) се определува фиктивната сила $\vec{Fj}$, која е наречена и инерцијална сила.

Инерцијалната сила $\vec{Fj}$ е реактивна сила која за време на движењето не дејствува на материјална точка туку врз телото "A" кое го овозможува движењето на материјалната точка (Сл.10.5.2).

Со воведувањето на поимот за фиктивна сила $\vec{Fj}$, односно инерцијална сила која е наречена и Даламберова сила, се оформува и Даламберовиот принцип за слободна материјална точка која гласи:

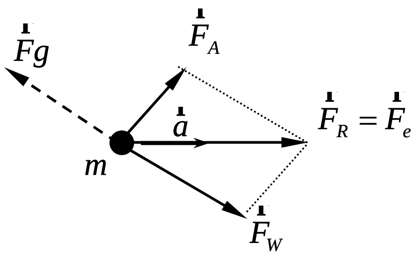
Ефективната сила $\vec{Fe} = \vec{F}$ и Даламберовата сила $\vec{Fj}$ ја одржуваат материјална точка во рамнотежа односно:

$$\vec{F} + \vec{Fj} = 0 \tag{10.5.2}$$

Со равенката (10.5.2) е дефинирана фиктивната равенка за рамнотежа на подвижна материјална точка, која е наречена равенка на динамичка рамнотежа.

- Даламберов принцип за неслободна материјална точка.

Нека е дадено движењето на неслободна материјална точка. Со користење на принципот на ослободување, точката е под дејство на активната сила $\vec{F}_A$ и реакцијата на врска $\vec{F}_W$. Резултантата $\vec{F}_R$ е:



Сл.10.5.3

$\vec{F}_R = \vec{F}_A + \vec{F}_W$ е ефективната сила $\vec{F}_e$ која врши промена на движењето, односно $\vec{F}_e = \vec{F}_R$.

Динамичката равенка на движење, според II Њутнов закон:

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R$ или:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W \tag{10.5.3}$$

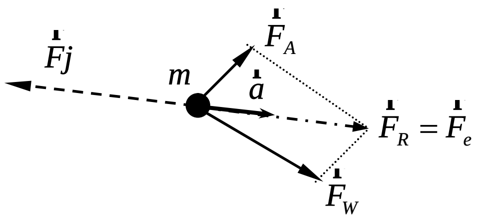
Даламбер воведува поим за изгубена сила, односно фикттивна (замислена) сила која дејствува врз материјалната точка, односно:

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_W$$

Според Даламбер , **движењето се врши под дејство на ефективната сила $\vec{F}_e = \vec{F}_R$, а активната сила $\vec{F}_A$ се разложува во ефективна $\vec{F}_e$ и така наречената изгубена сила $\vec{F}_g$ која за време на движењето е во рамнотежа со реакцијата на врската $\vec{F}_W$.**

Оваа формулација е наречена прва или основна формулација на Даламберов принцип за неслободна материјална точка.

Даламбер, со воведувањето на т.н. инерцијална сила $\vec{F}j = -m \cdot \vec{a}$, исто така фиктивната сила, која дејствува на неслободната материјална точка, ја оформува и втората практична формулација на својот принцип.



Сл.10.5.4

Од динамичката равенка на движење на неслободна материјална точка:

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_R$, односно $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_A + \vec{F}_W$

произлегува следното равенство:

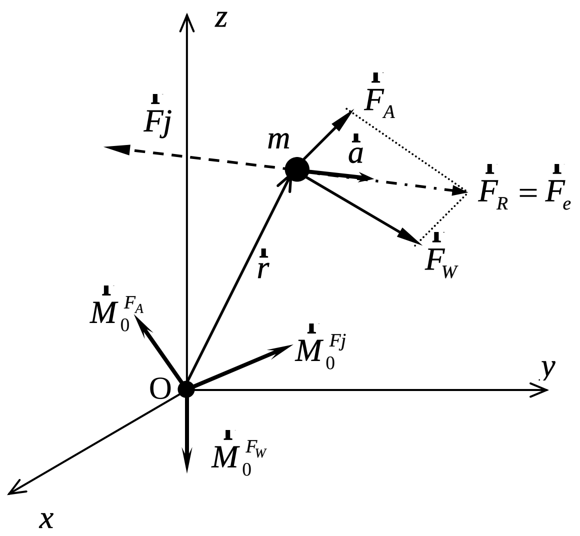
$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \left(-m \cdot \vec{a}\right) = 0 \text{, или}$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \vec{F}_j = 0 \tag{10.5.4}$$

Од равенката (10.5.4) произлегува втората формулација на Даламберов принцип која гласи:

Активната сила $\vec{F}_A$, реакцијата на врска $\vec{F}_W$ и инерцијалната сила $\vec{F}_A$ ја одржуваат во рамнотежа неслободната подвижна материјална точка. Се работи за условена рамнотежа наречена и динамичка рамнотежа на неслободна материјална точка.

Даламберовиот принцип може да се дефинира и преку моментна равенка:



Сл.10.5.5

Нека равенката (10.5.4) се помножи векторски со векторот $\vec{r}$.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_W + \vec{F}_j = 0 / \cdot \vec{r}$$

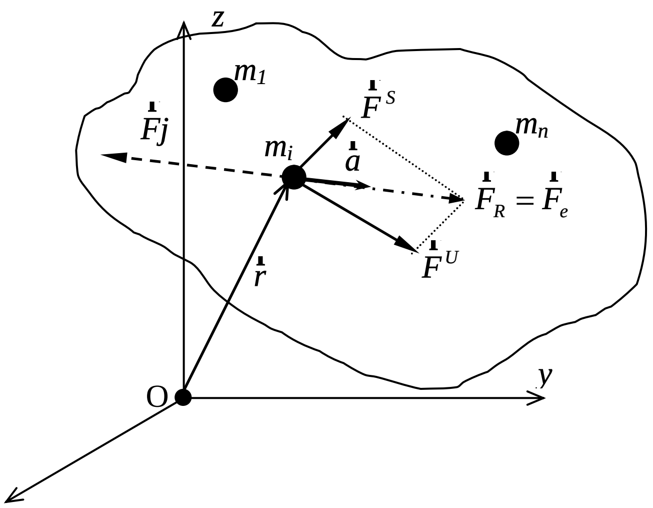
$$[\vec{r}, \vec{F}_A] + [\vec{r}, \vec{F}_W] + [\vec{r}, \vec{F}_j] = 0 \text{, или}$$

$$\vec{M}_0^{(\vec{F})} + \vec{M}_0^{(\vec{F}_W)} + \vec{M}_0^{(\vec{F}_J)} = 0 \qquad (10.5.5)$$

Моментот од активната сила, моментот од реакцијата на врска и моментот од инерцијалната сила, неслободната материјална точка ја одржуваат во рамнотежа. Станува збор за динамичкат а рамнотежа изразена преку моментите од силите кои дејствуваат врз точката во однос на координатниот почеток O.

- Даламберов принцип за материјален систем.

Нека е даден материјален систем од "n" материјални точки. Секоја точка со маса m_i е под дејство на Даламберовата сила $\vec{Fj} = -m\vec{a}$, и резултантата $\vec{F}_R$ определена од векторскиот збир на резултанта од надворешните сили $\vec{F}^S$ и резултанта од внатрешните сили $\vec{F}^U$, односно:



Сл.10.5.6

$$\vec{F}^S = \sum \vec{F} + \sum \vec{F}_W$$
$$\vec{F}^U = \sum \vec{F}_{ik}^U$$

Даламберовиот принцип за точка од системот гласи :

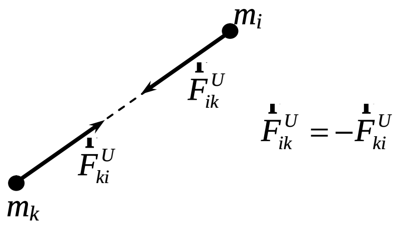
$$\vec{F}^S + \vec{F}^U + \vec{F}_j = 0 \qquad (i = 1,2,.....n) \qquad (10.5.6)$$

Резултантата од надворешните сили (активни и реакции на врски од надворешни тела), резултантата од внатрешните сили и инерцијалната сила, точката од системот ја одржуваат во рамнотежа.

Даламберовиот принцип за системот од материјални точки гласи:

$$\sum_1^n \vec{F}^S + \sum_1^n \vec{F}^U + \sum_1^n \vec{F}_j = 0 \qquad (i = 1,2,.....n)$$

Резултантата од сите внатрешни сили $\sum_{1}^{n} \vec{F}^{U} = \sum_{1}^{n} \sum \vec{F}_{ij}^{U} = 0$, како резултат на парниот број и заемното поништување. $\left(\vec{F}_{ik}^{U} = -\vec{F}_{ki}^{U}\right)$.



Сл.10.5.7

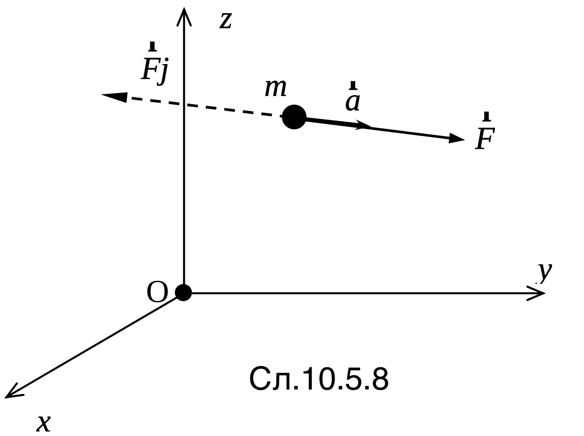
Според Даламберовиот принцип:

$$\sum_{1}^{n} \vec{F}^{S} + \sum_{1}^{n} \vec{F}_{j} = 0 \qquad (10.5.7)$$

Резултантата од сите надворешни сили и резултантата од сите инерцијални сили, материјалниот систем го одржуваат во рамнотежа.

Определување на инерцијални сили на подвижна материјална точка:

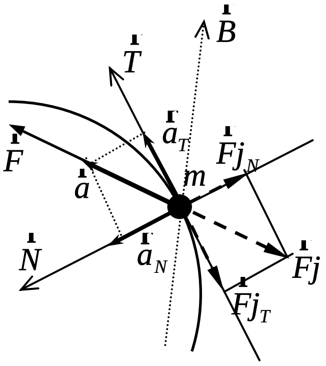
- Декартов координатен систем



Сл.10.5.8

$$\vec{Fj} = Fjx \cdot \vec{i} + Fjy \cdot \vec{j} + Fjz \cdot \vec{k}$$
$$\vec{Fj} = -m\vec{a}$$
$$Fjx = -ma_x = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$Fjy = -ma_y = -m\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$Fjz = -ma_z = -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

- Природен координатен систем $M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$



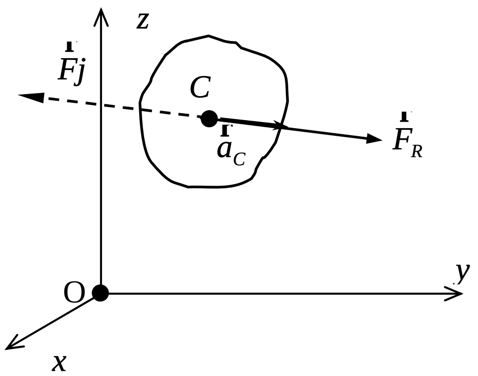
Сл.10.5.9

$$\vec{Fj} = -m\vec{a}$$
$$\vec{Fj} = Fj_T \cdot \vec{T} + Fj_N \cdot \vec{N}$$
$$Fj_T = -ma_T = -m\frac{dV}{dt} = -m\frac{d^2s}{dt^2}$$
$$Fj_N = -ma_N = -m\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$Fjz = -ma_z = -m\frac{V^2}{R_f}$$

каде е: Fj_N - центрифугална сила.

Определување на инерцијалните сили во динамика на круто тело:

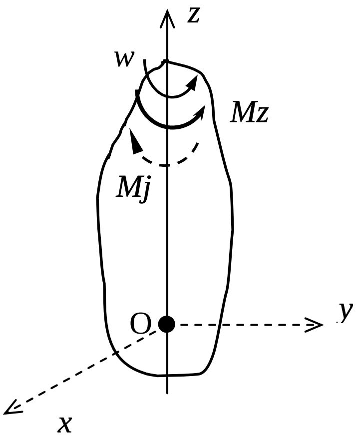
-Транслаторно движење на круто тело



Сл.10.5.10

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R$$
$$\vec{F}_R + \vec{F}j = 0$$
$$\vec{F}j = -m\vec{a}_C$$
$$\vec{F}j = Fjx \cdot \vec{i} + Fjy \cdot \vec{j} + Fjz \cdot \vec{k}$$
$$Fjx = -m\frac{d^2x_C}{dt^2}$$
$$Fjy = -m\frac{d^2y_C}{dt^2}$$
$$Fjz = -m\frac{d^2z_C}{dt^2}$$

- Ротација на круто тело околу неподвижна оска 0z

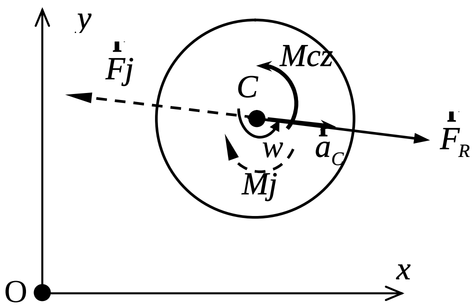


Сл.10.5.11

$$Jz\frac{d^2j}{dt^2} = Mz$$
$$Mz - Jz\frac{d^2j}{dt^2} = 0$$
$$Mz + Mj = 0$$
$$Mj = -Jz\frac{d^2j}{dt^2} = -Jz \cdot e$$

каде е Mj инерцијален момент, и е еднаков на производот од материјалниот момент на инерција во однос на ротационата оска Jz и аголовото забрзување e.

- Компланo движење на круто тело



Сл.10.5.12

Инерцијални сили од транслаторно движење.

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R$$
$$\vec{F}_R + \vec{F}j = 0$$
$$\vec{F}j = -m\vec{a}_C$$

$$Fjx = -m\frac{d^2x_C}{dt^2}$$
$$Fjy = -m\frac{d^2y_C}{dt^2}$$

Инерцијален момент од ротација околу оската Cz.

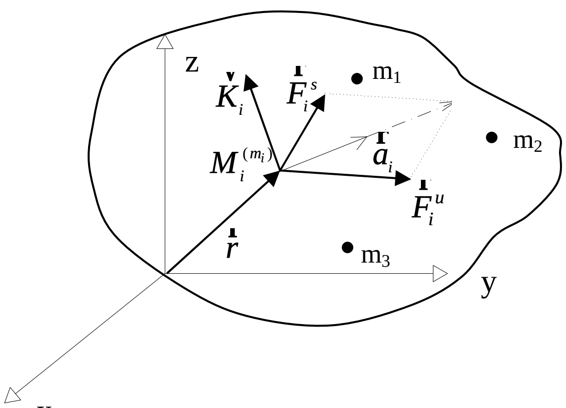
$$Jze = Mcz$$
$$Mcz + Mj = 0$$
$$Mj = -Jcz\frac{d^2j}{dt^2} = -Jcz \cdot e$$

GLAVA 11

OSNOVNI ZAKONI VO DINAMIKA NA MATERIJALNI SISTEMI

11.1 ZAKON ZA PROMENA NA KOLI^ESTVO NA DVI@EWE NA MATERIJALEN SISTEM

Neka e daden materijalen sistem od n materijalni to~ki koi se dvi`at pod dejstvo na sistem od nadvore{ni sili $\vec{F}_i^S (i = 1,2,...,n)$. Izbrana to~ka M_i e pod dejstvo na rezultanta od nadvore{ni sili $\vec{F}_i^S$ i rezultanta od vnatre{ni sili $\vec{F}_i^u$ dobieno kako rezultat od zaemno dejstvo na to~kite od sistemot (Sl.11.1.1).



Sl. 11.1.1

Dinami~kata ravenka na to~kata M_i so masa m se dobiva spored vtoriot Wutnov zakon:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^u ......(i = 1,2,....,n) \qquad (11.1.1)$$

Ravenkata (11.1.1) mo`e da se zapi{e vo forma:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{V}_i\right) = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^u ......(i = 1,2,....,n) \qquad (11.1.2)$$

Proizvodot $m_i \vec{V}_i$ go opredeluva koli~estvoto na dvi`ewe na to~kata M_i odnosno :

$$\vec{K}_i = m_i \vec{V}_i$$

Za sistem od n materijalni to~ki mo`e da se oformi slednata op{ta ravenka:

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}(\vec{K}_i) = \sum_1^n \vec{F}_i^s + \sum_1^n \vec{F}_i^u \qquad (11.1.3)$$

Zbirot od vnatre{nite sili sekoga{ e ednakov na nula, kako rezultat od zaemnoto dejstvo na materijalnite to~ki t.e.

$$\sum_1^n F_i^u = 0 .$$

Zbirot od izvodite na poedine~nite koli~estva na dvi`ewe na materijalni to~ki mo`e da se izrazi kako izvod po vremeto na zbirot na koli~estvoto na dvi`eweto na sistemot, odnosno $\frac{d}{dt}(\sum_1^n \vec{K}_i) = \frac{d}{dt}(\sum_1^n m_i \vec{V}_i)$.

Ako zbirnata dinami~ka karakteristika, koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem, $\sum_1^n \vec{K}_i$ se ozna~i so $\vec{K}$, a zbirnata karakteristika nadvore{nite sili $\sum_1^n \vec{F}_i^s$ rezultanta $\vec{R}^s$ so koja se definira i glavniot vektor na nadvore{nite sili, ravenkata (11.1.3) se dobiva vo forma

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^s \qquad (11.1.4)$$

So ravenkata (11.1.4) e opredelen zakonot za koli~estvo na dvi`ewe na materijalen sistem, koj glasi: **Izvodot po vremeto na koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem e ednakov na rezultantata na nadvore{nite sili.** So ovoj zakon mo`e da se opredeli op{tata ravenka na dvi`ewe na materijalniot sistem. Vnatre{nite sili ne vlijaat na op{toto dvi`ewe na sistemot. Nivnoto vlijanie e karakteristi~no pri dvi`eweto na poedinite to~ki na materijalniot sistem. Ako e rezultantata na nadvore{nite sili $\vec{R}^s = 0$ sleduva ravenkata:

$$\vec{K} = const \qquad (11.1.5)$$

So ravenkata (11.1.5) se definira zakonot za odr`uvawe na koli~estvoto na dvi`ewe na materijalen sistem.

Ravenkata (11.1.4) so koja e izrazen zakonot za koli~estvo na dvi`ewe na materijalen sistem vo vektorska forma, mo`e da se proektira vo trite ortogonalni pravci vo dekartoviot koordinaten sistem:

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^s; \frac{dK_y}{dt} = R_y^s; \frac{dK_z}{dt} = R_z^s.$$

Toa se tri analiti~ki dinami~ki ravenki na op{toto dvi`ewe na materijalniot sistem oformen preku zakonot za koli~estvo na dvi`ewe. Izvodot na proekcijata na koli~estvoto na dvi`eweto na materijalniot sistem vo odnos na izbrana nepodvi`na oska e ednakov na proekcijata na rezultantata na nadvore{nite sili vo odnos na istata oska.

Koli~estvoto na dvi`eweto na materijalniot sistem e vektor koj dejstvuva vo karakteristi~nata to~ka na sistemot centarot (sredi{te) na masite na karakteristi~nite to~ki na sistemot (Sl. 11.1.2).

Od ravenkata za centarot na masite na materijalnite to~ki na sistemot $\vec{r} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{r}_i}{\sum_1^n m_i}$ se dobiva ravenkata:

$$\sum_1^n m_i \vec{r}_c = \sum_1^n m_i \vec{r}_i \qquad (11.1.6)$$

So izvodot po vremeto na ravenkata (11.1.6) se dobiva :

$$\sum_1^n m_i \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_1^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

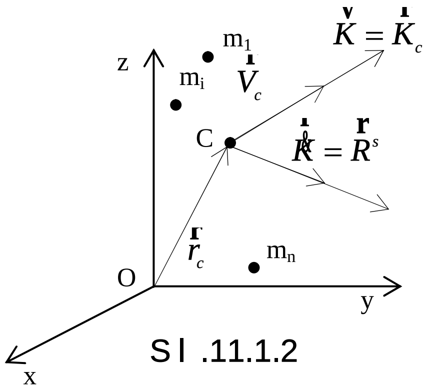
odnosno:

$$\sum_1^n m_i \vec{V}_c = \sum_1^n m_i \vec{V}_i$$

Sleduva deka : $$\vec{K} = \sum_1^n m_i \vec{V}_i = \sum_1^n m_i \vec{V}_c = \vec{K}_c$$

(11.1.7)

Od ravenkata (11.1.7) mo`e da se konstatira deka koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem e ednakov na proizvodot od masata na sistemot i vektorot na brzinata na centarot na masata na materijalniot sistem i ima pravec i nasoka na vektorot na brzinata na centarot na masata (Sl. 11.1.2).



Sl .11.1.2

Koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem mo`e da se opredeli na dva na~ina, kako vektorski zbir od koli~estvoto na dvi`eweto na to~kite od sistemot ili kako vektor opredelen od proizvodot na masata na sistemot koja se zamisluva deka e koncentrirana vo nejziniot centar i vektorot na brzinata na centarot na masata.

So izvodot na koli~estvoto na dvi`eweto na materijalniot sistem po vremeto se dobiva ravenkata:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{K}_c}{dt} = \sum_1^n m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \sum_1^n m_i \vec{a}_i = \vec{R}_c^s \qquad (11.1.8)$$

Sleduva deka rezultantata od nadvore{nite sili dejstvuva vo centarot na masite na materijalnite to~ki od sistemot.

Od ravenkata (11.1.8) proizleguva nova forma na zakonot za koli~estvo na dvi`ewe na materijalna to~ka i toa:

$$d\vec{K} = \vec{R}^s dt = d\vec{J}^s \qquad (11.1.9)$$

So ravenkata (11.1.9) se definira **zakonot za promena na koli~estvoto na dvi`ewe** vo diferencijalna forma koj glasi: **Elementarnata promena na koli~estvoto na dvi`ewe na sistemot e ednakov na elementarniot impuls na rezultantata na nadvore{nite sili.**

Vo integralna forma po izvr{ena integracija po vremeto ako e dvi`eweto vo kone~en interval od t_0 do t_1 se dobiva:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{R}^s dt = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{J}^s = \vec{J}^s \qquad (11.1.10)$$

So ravenkata (11.1.10) e definiran zakonot za promena na koli~estvoto na dvi`eweto na materijalen sistem spored koj promenata na koli~estvoto na dvi`eweto e ednakov na impulsot na rezultantata od nadvore{nite sili.

Impulsot na sistemot od nadvore{ni sili koi dejstvuvaat na materijalniot sistem mo`e da se opredeli od zbirot na poedini~nite impulsi odnosno:

$$\vec{J}_1^s - \vec{J}_0^s = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i^s dt \qquad (11.1.11)$$

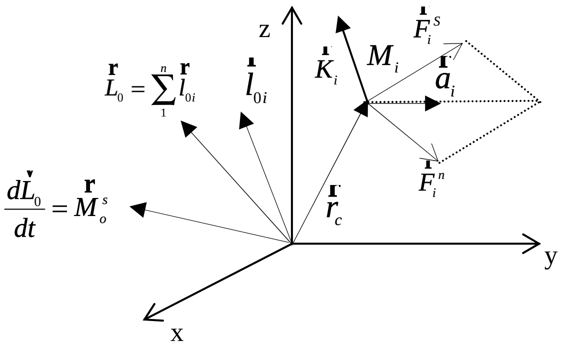
Na vektorskata ravenka (11.1.10) odgovaraat slednive skalarni ravenki:

$$\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= \int_{t_0}^{t_1} R_x^s dt = \sum_1^n \int_{t_0}^{t_1} F_{ix}^s dt \\ K_{1y} - K_{0y} &= \int_{t_0}^{t_1} R_y^s dt = \sum_1^n \int_{t_0}^{t_1} F_{iy}^s dt \\ K_{1z} - K_{0z} &= \int_{t_0}^{t_1} R_z^s dt = \sum_1^n \int_{t_0}^{t_1} F_{iz}^s dt \end{aligned} \qquad (11.1.12)$$

Promenata na proekcijata na koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem vo odnos na bilo koja nepodvi`na oska e ednakva na proekcijata na impulsot na rezultantata na nadvore{nite sili vo odnos na istata oska.

11.2 ZAKON ZA PROMENA NA KINETI^KIOT MOMENT NA MATRIJALEN SISTEM

Neka e daden materijalen sistem od n materijalni to~ki vo koj dejstuvaat nadvore{ni sili $\vec{F}_i^s \, (i = 1,2,...,n)$ (Sl. 11.2.1).



Sl. 11.2.1

To~kata n so masa m e pod dejstvo na rezultanta od nadvore{nite sili i vnatre{nite sili. Diferencijalnata ravenka na to~kata M_i e:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^n ......(i = 1,2,....,n) \qquad (11.2.1)$$

Neka ravenkata se pomno`i vektorski so $\vec{r}_i$:

$$[\vec{r}_i, m_i \vec{a}_i] = [\vec{r}_i, \vec{F}_i^s] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i^n] ......(i = 1,2,........n) \qquad (11.2.2)$$

Izrazot:

$$\left[\vec{r}_i, m_i\vec{a}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] \tag{11.2.3}$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \cancelto{0}{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m_i\vec{V}_i\right]} + \left[\vec{r}, m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\right]$$

So zamena na izrazot (11.2.3) vo ravenkata (11.2.2) se dobiva:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^s\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^n\right] \tag{11.2.4}$$

Za sistem od n- materijalni to~ki:

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^s\right] + \sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^n\right] \tag{11.2.5}$$

Ako zbirnite karakteristika na ravenkata (11.2.5) se analiziraat se dobiva:

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_1^n \left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{K}_i\right] = \frac{d}{dt}\sum_1^n \vec{l}_{0i} = \vec{L}_0 \tag{11.2.6}$$

So $\vec{L}_0 = \sum_1^n \vec{l}_{0i}$ se definira kineti~kiot moment na materijalniot sistem, odnosno momentot na koli~estvoto na dvi`ewe na materijalniot sistem vo odnos na polot O .

$$\sum_1^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^s\right] = \sum_1^n \vec{M}_{0i}^s = \vec{M}_0^s \tag{11.2.7}$$

$\vec{M}_o^s = \sum_1^n \vec{M}_{0i}^s$ go definira momentot na sistemot od nadvore{ni sili vo odnos na polot O (Sl. 11.2.1). So zamena na dinami~kite karakteristiki na sistemot kineti~kiot moment so $\vec{L}_0$ i karakteristikata na nadvore{nite sili, momentot na nadvore{nite sili vo odnos na polot, so $\vec{M}_o^s$ vo ravenkata (5) se dobiva:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_o^s \tag{11.2.8}$$

$\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \dot{\vec{L}}_0$ - e izvod po vremeto na kineti~kiot moment na sistemot

$\vec{M}_o^s$ -e zbiren moment od nadvore{nite sili, nare~en glaven moment na sistemot od nadvore{nite sili

Ravenkata (11.2.8) go definira **zakonot za kineti~niot moment na materijalen sistem** koj glasi: **Izvodot po vremeto na kineti~niot moment vo odnos na polot O e ednakov na glavniot moment na**

nadvore{nite sili vo odnos na istiot pol. Op{tata promena na kineti~kiot moment na sistemot ne zavisi od vnatre{nite sili na istiot.

Zakonot za kineti~niot moment mo`e da se izrazi vo analiti~ka odnosno skalarna forma :

$$\frac{dL_{0x}}{dt} = M^{s}_{ox}; \qquad \frac{dL_{0y}}{dt} = M^{s}_{oy}; \qquad \frac{dL_{0z}}{dt} = M^{s}_{oz} \tag{11.2.9}$$

Od ravenkite (11.2.9) proizleguva **zakonot za kineti~kiot moment na sistemot vo odnos na nepodvi`na oska** : **Izvodot po vremeto na kineti~kiot moment na sistemot vo odnos na nepodvi`na oska e ednakov na glavniot moment od nadvore{nite sili vo odnos na istata nepodvi`na oska**.

Vo slu~aj koga $\vec{M}^{s}_{o}$=0, ravenkata (11.2.8) se dobiva vo forma:

$$\vec{L}_{0} = const \tag{11.2.10}$$

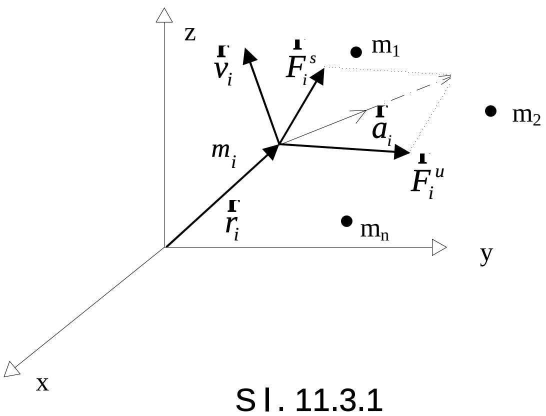
Ravenkata (11.2.10) go definira zakonot za odr`uvawe na kineti~kiot moment na sistemot vo odnos na to~ka.

Od ravenkata (11.2.10) proizleguva i zakonot za odr`uvawe na kineti~kiot moment na sistemot vo odnos na nepodvi`na oska.

11.3 ZAKON ZA PROMENA NA KINETI^KATA ENERGIJA NA MATERIJALEN SISTEM

Neka e daden sistem od n materijalni to~ki koj se dvi`i vo prostorot. (Sl.11.3.1). Sekoja to~ka od sistemot e pod dejstvo na rezultatnta od nadvore{ni i rezultanta od vnatre{ni sili, odnosno $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$.

Spored vtoriot Wutnov zakon, dinami~kite ravenki na dvi`ewe se:



Sl. 11.3.1

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u \quad \text{za } i = 1,2,....,n \qquad (11.3.1)$$

Vo daden moment sekoja to~ka od sistemot dobiva elementrano pomestuvawe $d\vec{r}_i$.

Ako ravenka (11.3.1) se pomno`i skalarno so $d\vec{r}_i$, se dobiva:

$$\left(m_i \cdot \vec{a}_i, d\vec{r}_i\right) = \left(\vec{F}_i^s, d\vec{r}_i\right) + \left(\vec{F}_i^u, d\vec{r}_i\right) \qquad (11.3.2)$$

So izrazot $\left(\vec{F}_i^s, d\vec{r}_i\right) = dA_i^s$ e opredelena elementarnata rabota na rezultantata od nadvore{nite sili, a so izrazot $\left(\vec{F}_i^u, d\vec{r}_i\right) = dA_i^u$, elementarnata rabota na rezultatntata od vnatre{nite sili.

Identitetot od levata strana $\left(m_i \cdot \vec{a}_i, d\vec{r}_i\right)$ mo`e da se transformira vo sledna forma:

$$\left(m_i \cdot \frac{d\vec{V}_i}{dt}, d\vec{r}_i\right) = \left(m_i \cdot d\vec{V}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = m_i \cdot \vec{V}_i \cdot d\vec{V}_i = d\left(m_i \frac{Vi^2}{2}\right) = dT_i \qquad (11.3.3)$$

za $i = 1,2,....,n$

Kade e dT_i - elementarna kineti~ka energija na to~ka od sistemot.

So zamena na definiranite izrazi, ravenkata (11.3.2) se dobiva slednoto:

$$dT_i = dA_i^s + dA_i^u \qquad (11.3.4)$$

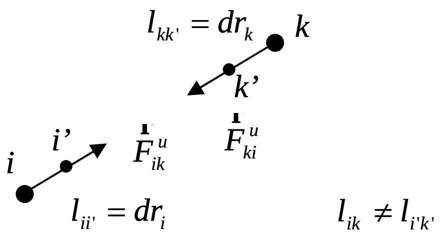
Za site to~ki od sistemot se dobiva zbirnata ravenka,

$$\sum_1^n dT_i = \sum_1^n dA_i^s + \sum_1^n dA_i^u \qquad (11.3.5)$$

So ravenka (11.3.5) e definiran zakonot za promena na kineti~kata energija vo diferencijalna forma koj glasi:

Promenata na kineti~kata energija na sistemot vo slu~aj na elementarni pomestuvawa na poedinite to~ki od sistemot, odnosno diferencijalot na vkupnata kineti~ka energija e ednakov na zbirot od elementarnite raboti na nadvore{ni i vnatre{ni sili za istite elementarni pomestuvawa na soodvetnite to~ki na sistemot.

Vo slu~aj koga rastojanieto pome|u dve to~ki od sistemot e promenlivo za vreme na dvi`eweto rabotata od vnatre{nite sili e razli~na od nula, {to zna~i deka vrz promenata na kineti~kata energija na sistemot }e vlijae i rabotata na vnatre{nite sili. Neka to~kite "$k$" i "$i$" se pribli`at edna kon druga. Rabotata na vnatre{nite sili iznesuva:



Sl. 11.3.2

$$dA_i^u = \left(\vec{F}_{ik}^u, d\vec{r}_i\right) + \left(\vec{F}_{ki}^u, d\vec{r}_k\right) = \vec{F}_{ik} dr_i + \vec{F}_{ki} dr_k$$

Dvete sili $\vec{F}_{ik}$ i $\vec{F}_{ki}$ izvr{uvaat pozitivna elementarna rabota, bidej}i dvete to~ki od sistemot se pribli`eni. (Sl. 11.3.2).

Vo slu~aj na kone~no pomestuvawe na materijalniot sistem, zakonot za promena na kineti~kata energija se dobiva vo sledna integralna forma:

$$\sum_1^n T_{i1} - \sum_1^n T_{i0} = \sum_1^n \int_{Mio}^{Mi} dA_i^s + \sum_1^n \int_{Mio}^{Mi} dA_i^u \tag{11.3.6}$$

Spored ravenka (11.3.6) mo`e da se zaklu~i deka **promenata na kineti~kata energija na sistemot pri kone~nite pomestuvawa na poedinite to~ki od sistemot e ednakva na zbirot od rabotata na nadvore{nite i vnatre{nite sili koi dejstvuvaat na sistemot.**

Vo slu~aj na idealni vrski, koga rastojanieto pome|u bilo koi to~ki od sistemot e postojano, i ne se menuva so tekot na dvi`eweto n rabotata od vnatre{nite sili e ednakva na nula $\sum_1^n \int_{Mio}^{Mi} dA_i^u = 0$.

Nadvore{nite i vnatre{nite sili koi dejstvuvaat na materijalniot sistem mo`at da bidat konzervativni, odnosno potencijalni da zavisat od polo`bata na sistemot, odnosno, $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, ...\vec{r}_k, ...\vec{r}_n)$ ili vo skalarna forma:

$$\begin{aligned} Fx_i &= Fx_i\left(x_1, y_1, z_1 ....x_i, y_i, z_i ....x_n, y_n, z_n\right) \\ Fy_i &= Fy_i\left(x_1, y_1, z_1 ....x_i, y_i, z_i ....x_n, y_n, z_n\right) \\ Fz_i &= Fz_i\left(x_1, y_1, z_1 ....x_i, y_i, z_i ....x_n, y_n, z_n\right) \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

Sistem pod dejstvo na potencijalni sili sodr`i skalarna funkcija na silite $U = U(x_1, y_1, z_1 ....x_i, y_i, z_i ....x_n, y_n, z_n)$,odnosno potencijalna energija P = - U.

Vo ovoj slu~aj potencijalnite sili se definiraat vo zavisnost od potencijalnata energija, odnosno

$$Fx_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Fy_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Fz_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \tag{11.3.8}$$

Elementarnata rabota na sistemot koj e pod dejstvo na potencijalni sili se dobiva vo forma:

$$\sum_1^n dA_i = -\sum_1^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi \tag{11.3.9}$$

Totalniot diferencijal na potencijalot so sprotiven znak e ednakov na elementarnata rabota na sistemot.

Zakonot za promena na kineti~kata energija na sistemot vo diferencijalna forma e:

$$\sum_1^n dT_{i1} - \sum_1^n dT_{i0} = -d\Pi \tag{11.3.10}$$

odnosno elementarniot prirast ili elementarnata promena na kineti~kata energija e ednakva na elementaren potencijal so sprotiven znak.

Vo integralna forma, pri kone~no pomestuvawe na sistemot, se dobiva:

$$\sum_1^n T_{i1} - \sum_1^n T_{i0} = -\int_{\Pi_0}^{\Pi} d\Pi = \Pi_0 - \Pi_1 \tag{11.3.11}$$

ili:

$$\sum_1^n T_{i0} + \Pi_0 = \sum_1^n T_{i1} + \Pi_1 = const. \tag{11.3.12}$$

Izrazot (11.2.12) go definira zakonot za odr`uvawe na totalnata mehani~ka energija na konzervativni odnosno potencijalni sistemi, koj glasi:

Totalnata mehani~ka (kineti~ka i potencijalna) energija na integralniot sistem za vreme na dvi`eweto ostanuva konstantna.

Potencijalot na sitemot mo`e da se opredeli kako zbir od potencijalot na nadvore{nite i vnatre{nite sili, odnosno:

$$\Pi = \Pi^s + \Pi^u \tag{11.3.13}$$

Ako sistemot e vo miruvawe $\sum_1^n T_{i1} = \sum_1^n T_{i0} = 0$, odnosno kineti~kata energija e ednakva na nula, zakonot za odr`uvawe na totalnata mehani~ka energija se dobiva vo forma:

$$\Pi_0 = \Pi = const. \tag{11.3.14}$$

So (11.3.14) e definiran zakonot za odr`uvawe na potencijalot. So zamena na (11.3.13) vo (11.3.14) se dobiva:

$$\Pi_0{}^s + \Pi_0{}^u = \Pi^s + \Pi^u = const$$

ili

$$\Pi_0{}^s - \Pi^s = \Pi^u - \Pi_0{}^u = const \tag{11.3.15}$$

Razlikata od potencijalnata energija na nadvore{nite sili vo po~etna i krajna (deformirana) polo`ba ja opredeluva rabota od nadvore{nite sili nare~ena deformaciona rabota A^S, odnosno:

$$A^S = \Pi_0^S - \Pi^S \tag{11.3.16}$$

Razlikata od potencijalot na vnatre{nite sili vo deformirana polo`ba i po~etna opredeluva rabota od vnatre{nite sili A^U, odnosno:

$$A^U = \Pi^U - \Pi_0^U \tag{11.3.17}$$

So zamena na (11.3.16) i (11.3.17) vo (11.3.15), zakonot za odr`uvawe na potencijalot se dobiva vo forma:

$$A^S = A^U \tag{11.3.18}$$

ili

$$A^S + \left(-A^U\right) = 0 \tag{11.3.19}$$

A^U e rabota na vnatre{nite sili (elasti~ni sili) koi sistemot go vra}aat vo prvobitna (nedeformirana) polo`ba.

Zakonot za odr`uvawe na porencijalnata energija na sistemot se primenuva vo statikata, odnosno vo jakosta na materijalite i vo teorijata na konstrukciite pri re{avawe na mnogubrojni zada~i.